www.estudar.com.vc

Resumo e Lista de Exercícios

Cálculo III

Fuja do Nabo P2 2019.1

Resumo

1. Integrais de Linhas de Campos Escalares

Dado um campo escalar $f(x, y, z)$ e uma curva, com parametrização $\gamma(t)$, $a < t < b$, calculamos a integral de linha de f, sobre a curva γ, a partir da fórmula:

$$\int_\gamma f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big) \cdot |\gamma'(t)|\, dt$$

Onde:

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\big(x(t)\big)^2 + \big(y(t)\big)^2 + \big(z(t)\big)^2}$$

a. Comprimento de Fio

Dado um fio delgado $\gamma = \gamma(t),\ \ a \le t \le b$, o comprimento do fio é dado por:

$$\int_\gamma ds = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

b. Massa do Fio

Dado um fio delgado $\gamma = \gamma(t),\ \ a \le t \le b$, com densidade f, a massa do fio é dada por:

$$\int_\gamma f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big) \cdot |\gamma'(t)|\, dt$$

2. Integrais de Linhas de Campos Vetoriais

a. Cálculo pelo Produto Escalar

Dado um campo vetorial $\vec{F}$, uma curva γ e sua orientação, com parametrização $\gamma(t),\ a < t < b$, calculamos a integral de linha de $\vec{F}$, sobre a curva γ a partir da fórmula:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{d}r = \int_a^b \vec{F}\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Ao aplicar este método, basta seguir a receita:

I. Identificar o campo $\vec{F}$ e a curva γ;
II. Parametrizar a curva γ de acordo com a orientação dada, obtendo $\gamma(t)$, com $a < t < b$;
III. Calcular $\vec{F}\big(\gamma(t)\big)$ e $\gamma'(t)$;
IV. Calcular a integral $\int_a^b \vec{F}\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\, dt$.

Muitas vezes a integral é dada na forma $\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz$, onde:

$$\vec{F} = (P, Q, R)$$

b. Rotacional de um Campo

Dado um campo $\vec{F} = (P, Q, R)$, temos que o rotacional do campo é definido por:

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Se o campo for bidimensional, do tipo $\vec{F} = (P, Q)$, então o rotacional é:

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow rot\,\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Um campo vetorial cujo rotacional é nulo é definido como **irrotacional**.

c. Domínio Simplesmente Conexo no $\mathbb{R}^2$

Um domínio simplesmente conexo, no $\mathbb{R}^2$, envolve qualquer domínio "sem furos". Por exemplo, o domínio do campo:

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}}{x^2 + y^2}$$

É $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Por isso, há um furo no domínio (o ponto $(0,0)$), e esse domínio não é simplesmente conexo.

d. Campos Conservativos

Um campo vetorial $\vec{F}$ é chamado de conservativo se ele é um **gradiente** de um campo escalar φ, tal que:

$$\nabla\varphi = \vec{F}$$

Observe que:

I. Se o campo vetorial $\vec{F}$ é definido em um domínio simplesmente conexo, e seu rotacional é nulo (campo irrotacional), então $\vec{F}$ é **conservativo**.

II. Se o campo $\vec{F}$ não é irrotacional $\left(rot\,\vec{F} \neq \vec{0}\right)$, então $\vec{F}$ não é conservativo.

III. Se o campo $\vec{F}$ é definido em um domínio que não é simplesmente conexo, mas seu rotacional é nulo (campo irrotacional), então $\vec{F}$ pode ou não ser conservativo.

c. Propriedades de Campos Conservativos

Se o campo $\vec{F}$ for conservativo, então as seguintes propriedades valem:

I. $\vec{F} = \nabla\varphi$, onde $\varphi(x, y, z)$ é a função potencial de $\vec{F}$.

II. A integral de linha entre os pontos A e B de uma curva γ vale $f(B) - f(A)$, ou seja:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = f(B) - f(A)$$

III. A integral de linha sobre uma curva fechada vale 0, ou seja:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{d}r = 0$$

3. Teorema de Green

O Teorema de Green transforma o cálculo de uma integral de linha de campo vetorial em uma integral dupla, seguindo a fórmula:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D rot\ \vec{F}\ \cdot \vec{k}\ dA$$

Neste caso, γ é uma curva fechada e D é o interior de γ, ou seja, γ é a fronteira da região D.

Esse teorema somente se aplica quando ambas as condições a seguir são obedecidas:

I. A curva γ deve estar orientada positivamente.
II. A região D pertencer ao domínio de $\vec{F}$, ou seja, o interior da curva γ deve estar inclusa ao domínio de $\vec{F}$.

A orientação de uma curva é definida por uma convenção. As curvas que compõem uma região precisam estar orientadas da seguinte forma:

I. Fronteira exterior no sentido anti-horário;
II. Fronteira(s) interior(es) no sentido horário.

Caso o domínio de $\vec{F}$ tenha uma **singularidade** (ou seja, um "furo" no domínio), impedindo D de estar contida nesse domínio, é necessário:

I. Criar uma curva B para cada singularidade, tal que o interior da curva, D_B, inclua a singularidade (ou seja, o "furo" deve estar dentro da curva);

II. Orientar de forma conveniente a parametrização dessa curva (se a curva externa estiver parametrizada no sentido anti-horário, ela deve ser orientada no sentido horário);

III. Escrever a seguinte relação pelo Teorema de Green:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{D} rot\, \vec{F} \cdot \vec{k}\, dA$$

Lista de Exercícios

1. Integrais de Linha de Campos Escalares

Exercício 1, P2 2018

Calcule $\int_\gamma x(z-20)\,ds$, onde γ é o trecho da intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 12 - 4y$, do ponto $(4,-2,20)$ ao ponto $(0,2,4)$ e que está contido no semiespaço $x \geq 0$.

2. Aplicação de Integrais de Linha de Campos Escalares

Exercício 1a, P2 2016

Calcule a massa do fio cujo formato é o da curva da intersecção das superfícies $z = x^2 - y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$, $x > 0$, $|y| \leq 1$, com densidade $\delta(x,y,z) = |y|$.

3. Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Exercício 1b, P2 2016

Calcule $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$ sendo γ a curva de intersecção das superfícies $4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$, percorrida de modo que sua projeção no plano yz seja percorrida no sentido anti-horário.

4. Campos Conservativos

Exercício 3, P2 2018

Calcule a integral de linha:

$$\int_\gamma (4y\cos(x^2) - 8x^2 y\sin(x^2))\, dx + (4x\cos(x^2) + 4y)\, dy$$

Onde γ é a curva parametrizada $\gamma(t) = (t, \cos t)$, com $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Campos Conservativos

Exercício 2, P2 2017

Considere o campo

$$\vec{F} = (ye^{xy}\sin(yz) + 1, xe^{xy}\sin(yz) + ze^{xy}\cos(yz) - y, ye^{xy}\cos(yz) - z)$$

a. Mostre que $\vec{F}$ é conservativo.

b. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\gamma(t) = (\cos t\,, 1 + \sin t\,, \cos 2t)$, com $0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$.

6. Teorema de Green

Exercício 2, P2 2018

Calcule a integral de linha $\int_\gamma dx + \left(x + e^{y^2}\right)dy$, onde γ é o trecho da curva $y = -x^2 + 4x$, do ponto (0,0) ao ponto (4,0).

7. Teorema de Green

Exercício 4, P2 2018

Calcule a integral de linha:

$$\int_{\gamma} \left(\frac{-y}{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{1 + x^4} \right) dx + \left(\frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2} + x \right) dy$$

Onde γ é a fronteira da região no plano determinada pelas desigualdades $y \geq x - 2$ e $y \leq -x^2 + 4$, orientada no sentido anti-horário.

Gabarito

1. $\frac{16}{3}\left(1-(17)^{3/2}\right)$

2. $\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

3. -6π

4. -2

5.

a. Demonstração.

b. $-\frac{1}{2}-e\sin(1)$

6. $-\frac{20}{3}$

7. $2\pi+\frac{125}{6}$