www.estudar.com.vc

Cálculo Numérico

Lista de Exercícios

Fuja do Nabo P1 2019.1

www.estudar.com.vc

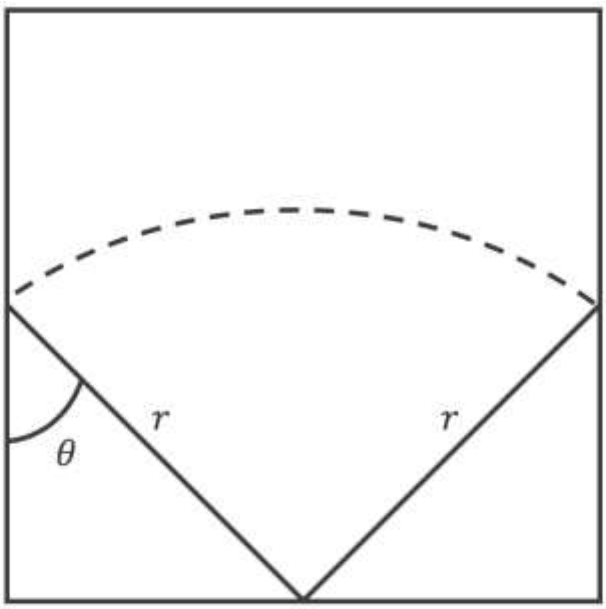
Lista de Exercícios

1. Zeros de Funções

Exercício 3, P1 2016 Adaptado

Em uma área quadrada (sem obstáculos), uma pessoa deve fazer exercícios com uma corda amarrada na cintura. Esta corda possui uma extremidade presa em um gancho, localizado exatamente na metade de um dos lados. Considere como "área de exercício" toda a região em que a pessoa consegue chegar com a corda amarrada.

Calcule o tamanho r da corda para que a área de exercício seja metade da área total. Determine o ângulo θ (visto na figura abaixo) com erro menor do que 10^{-3}, e, a partir desse ângulo, obtenha o valor de r.



2. Sistemas Lineares

Exercício 2, P1 2016 Adaptado

Considere o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

a. Determine a decomposição LU da matriz do sistema ou da matriz obtida desta através de uma permutação de linhas. Utilize a decomposição para resolver o sistema (trabalhe com frações).

b. Reescreva o sistema, ordenando as incógnitas e equações de forma que o método de *Gauss-Seidel* seja convergente quando aplicado ao sistema resultante. Calcule uma iteração do método a partir de $x^{(0)} = (0; -1/2; 1)$. Delimite o erro após esta iteração e estime o número de iterações necessárias para garantir um erro menor que 10^{-3}, sem utilizar o conhecimento da solução.

3. Sistemas Lineares

Exercício 1, P1 2018 Adaptado

Na resolução do sistema linear abaixo:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utilizou-se o método de decomposição LU com pivotação parcial (condensação pivotal) com aritmética de ponto flutuante com 2 algarismos significativos. Chegou-se à solução $x = (1{,}6;\, 1{,}8;\, -2{,}0)$, após a obtenção da seguinte decomposição da matriz A (eventualmente permutada):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}33 & 1 & 0 \\ -0{,}33 & 0{,}82 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3{,}3 & 2{,}7 \\ 0 & 0 & -0{,}9 \end{bmatrix}$$

Utilize a decomposição dada para efetuar uma etapa do método de refinamento da solução.

4. Método dos Mínimos Quadrados

Exercício 3, P1 2016 Adaptado

Dada uma quantidade de $A\,mg$ de glicose em algumas sobremesas, realizou-se um estudo com uma população, a fim de medir a concentração de glicose no sangue (dada em mg/L) em t horas após a ingestão de tais doces. A concentração de glicose no sangue é dada por:

$$c(t) = A\alpha t e^{-\beta t}$$

Uma sobremesa que contém $400\,mg$ de glicose é ingerida por uma pessoa, e foram medidas as concentrações de glicose em seu sangue (de 2 em 2 horas), conforme a tabela abaixo:

t **(horas)**	2	4	6	8	10
$c(t)\ (mg/L)$	51,34	52,72	40,60	27,79	17,84

Utilize um Método dos Mínimos Quadrados para estimar os parâmetros α e β neste caso.

5. Método dos Mínimos Quadrados

Exercício 1, P1 2016 Adaptado

As coordenadas de um ponto $P = (x, y)$ no plano podem ser determinadas conhecendo-se a distância dele a três pontos de referência $P_i = (p_i, q_i)$, $i = 1, 2, 3$, não colineares. Se P está próximo à origem e os pontos de referência longe dela, a distância d_i de P a P_i pode ser aproximada pela expressão $d_i = r_i - p_i x/ri - q_i y/r_i$, onde $r_i = \sqrt{p_i^2 + q_i^2}$. As medidas das distâncias estão sujeitas a erros. Foram medidas as distâncias $d_1 = 49{,}4$, $d_2 = 49{,}6$ e $d_3 = 51{,}2$ em relação aos pontos $P_1 = (50; 0)$, $P_2 = (-30; 40)$ e $P_3 = (-30; -40)$, respectivamente. Determine as coordenadas de P resolvendo o sistema linear sobredeterminado para (x, y) segundo o MMQ.

6. Método do Ponto Fixo (Aproximações Sucessivas)

Exercício 3, P1 2013 Adaptado

Sejam $f(x) = x^2 - 3x + 1$ e $\phi(x) = \frac{x^2+1}{3}$.

a. Mostre que se $\bar{x}$ é um ponto fixo de ϕ, então $\bar{x}$ é uma raiz de f.
b. Mostre que a sequência resultante do processo iterativo $x_{n+1} = \phi(x_n)$, com $x_0 \in [0, 1/2]$, satisfaz condições que asseguram sua convergência para uma raiz de f.
c. Determine n tal que $|x_n - \bar{x}| < 10^{-3}$, sabendo-se que x_0 foi escolhido em $[0, 1/2]$ com $|x_0 - \bar{x}| \leq 0{,}1$. Não calcule $\bar{x}$.

Gabarito

1. $\bar{\theta} = 1{,}032150875$ e $r = 116{,}4952\ m$

2.

a. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

b. $\left(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}\right) = \left(\frac{7}{16}, \frac{17}{32}, \frac{13}{64}\right)$, $erro \leq 0{,}46875$ e 10 iterações necessárias.

3. $\tilde{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}74 \\ 2{,}0 \\ -2{,}22 \end{bmatrix}$, ou $\tilde{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}7 \\ 2{,}0 \\ -2{,}2 \end{bmatrix}$ com dois algarismos significativos.

4. $\alpha = 0{,}12499$ e $\beta = 0{,}3333$

5. $P = (0{,}628; 1)$

6.

a. Demonstração

b. Demonstração

c. $n = 5$