www.estudar.com.vc

P2 2015.2 FEI

Adaptada

Exercício 1 L'Hospital

Explicação

1. Utilizando a Regra de L'Hospital, calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x^2)-\sin x}{\sin^2 x}$$

Para poder aplicar a Regra de L'Hospital, precisamos de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Assim, vamos fazer $x=0$ e verificar se há a indeterminação.

$$\frac{0-\ln(1+0^2)-\sin 0}{\sin^2 0}=\frac{-\ln(1)-0}{0}=\frac{0}{0}$$

Há a indeterminação! Podemos aplicar L'Hospital diretamente. Vamos então **derivar** o **denominador** e o **numerador**. Teremos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x^2)-\sin x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{L'H}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Derivando $f(x)=x-\ln(1+x^2)-\sin x$:

As derivadas de x e $\sin x$ são imediatas, já para $\ln(1+x^2)$ precisamos usar a **regra da cadeia**, que é:

$$f\big(g(x)\big)'=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

Assim:

$$(\ln(1+x^2))'=\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^2}$$

Juntando todas as derivadas:

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} - \cos x$$

Agora vamos trabalhar com $g(x) = \sin^2 x$.

Novamente, utilizando a regra da cadeia, ficaremos com:

$$g'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$$

Agora vamos colocar essas derivadas no limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{2x}{1+x^2} - \cos x}{2\sin x \cdot \cos x}$$

Substituindo $x = 0$ de novo, vamos ter:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{2x}{1+x^2} - \cos x}{2\sin x \cdot \cos x} = \frac{1 - \frac{2\cdot 0}{1+0^2} - \cos 0}{2\sin 0 \cos 0} = \frac{1-0-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Continuamos com a **indeterminação**!

Vamos **aplicar L'Hospital de novo**:

Para o numerador, precisamos calcular $f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} - \cos x$.

A derivada de $\cos x$ é imediata, e para a fração, vamos utilizar a regra do quociente. Assim:

$$f''(x) = -\left[\frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2}\right] + \sin x$$

Para encontrar a derivada de $g'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$ vamos utilizar a regra do produto. Teremos:

$$g''(x) = 2[\cos x \cos x + \sin x\,(-\sin x)] = 2[\cos^2 x - \sin^2 x]$$

Substituindo as derivadas novamente no limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\left[\frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2}\right] + \sin x}{2[\cos^2 x - \sin^2 x]}$$

Mais uma vez, vamos tentar colocar $x = 0$ e verificar se ainda há indeterminação:

$$\frac{-\left[\frac{2(1+0^2) - 2\cdot 0(2\cdot 0)}{(1+0^2)^2}\right] + \sin 0}{2[\cos^2 0 - \sin^2 0]} = \frac{\frac{-2}{1} + 0}{2} = -1$$

Não há indeterminação, e descobrimos que o limite vale -1.

Resposta esperada: -1.