www.estudar.com.vc

P2 2015.2 FEI

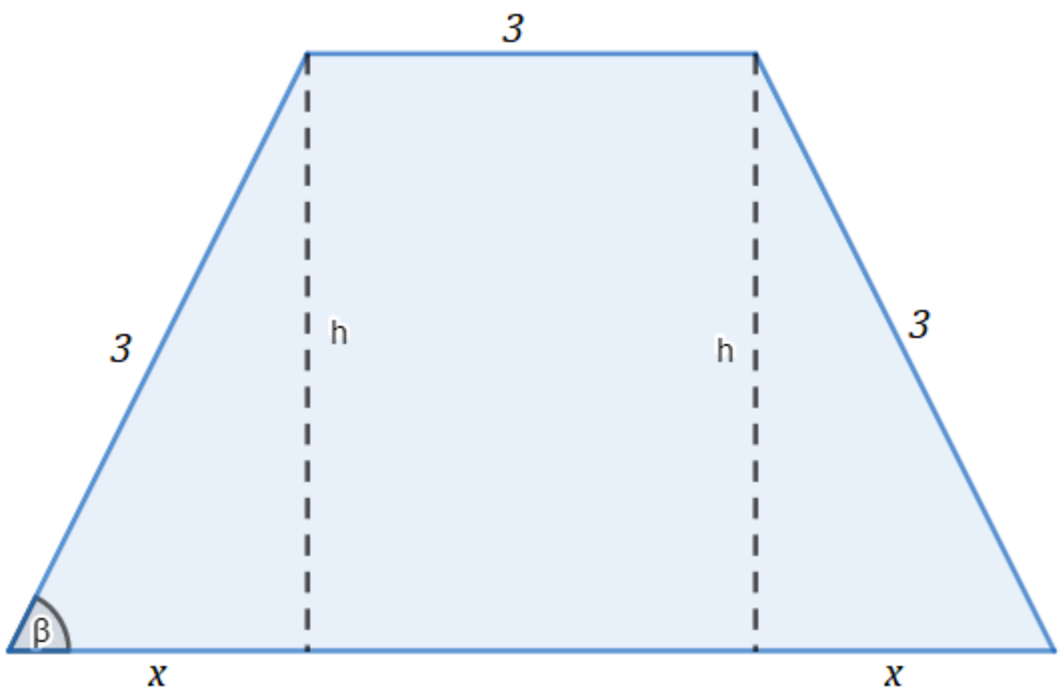
Adaptada

Exercício 4 Maximização

Explicação

4. Num trapézio isósceles, a base menor e as laterais medem $3cm$ cada. Determinar, pela pesquisa de pontos de máximo e mínimo, o ângulo interno (β) determinado pela maior base e por uma das laterais de modo que a área do trapézio seja máxima.

Desenhando os dados do nosso problema, teremos:



Queremos otimizar a área do trapézio, então, precisamos derivar e igualar a 0 a expressão:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Onde, B é a base maior, b é a base menor e h é a altura. No nosso caso:

$$A = \frac{(3 + 2x + 3) \cdot h}{2} = \frac{(2x + 6) \cdot h}{2}$$

Essa função está dependendo de duas variáveis, precisamos de alguma manipulação que faça com que ela seja de apenas uma variável.

Vamos tentar colocar **uma variável em função da outra**.

Podemos usar o teorema de Pitágoras no triângulo formado pela altura, pelo x e por um dos lados:

$$3^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h = \sqrt{9 - x^2}$$

Agora, podemos substituir esse h na expressão da área, deixando em função de x:

$$A = \frac{(2x+6) \cdot h}{2} = \frac{(2x+6) \cdot \sqrt{9 - x^2}}{2}$$

$$A(x) = (x+3)\sqrt{9 - x^2}$$

A área depende de uma só variável, e precisamos encontrar sua derivada. Para isso, vamos usar a regra do produto:

$$A'(x) = \left((x+3)\right)'\sqrt{9 - x^2} + (x+3)\left(\sqrt{9 - x^2}\right)'$$

$$A'(x) = 1\sqrt{9 - x^2} + (x+3)\left(\frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}}\right)$$

$$A'(x) = \sqrt{9 - x^2} + \frac{-2x^2 - 6x}{2\sqrt{9 - x^2}}$$

Igualando os denominadores, ou seja, fazendo o M.M.C:

$$A'(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}\left(2\sqrt{9-x^2}\right)}{2\sqrt{9-x^2}} + \frac{(-2x^2-6x)}{2\sqrt{9-x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{2(9-x^2)-2x^2-4x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{18-2x^2-2x^2-6x}{2\sqrt{9-x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{-2x^2-3x+9}{\sqrt{9-x^2}}$$

Por fim, precisamos igualar a derivada a 0:

$$\frac{-2x^2-3x+9}{\sqrt{9-x^2}} = 0$$

O denominador não pode ser 0, então $x \neq -3$ e $x \neq 3$.

Analisando o numerador:

$$-2x^2-3x+9=0$$

As raízes serão: $x_1 = -3$ e $x_2 = \frac{3}{2}$.

Como não podemos usar $x = -3$, nos resta apenas $x = \frac{3}{2}$.

Para descobrir o valor de β, podemos usar a relação trigonométrica do **cosseno**:

$$\cos\ \beta = \frac{x}{3}$$

$$\cos\ \beta = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

Logo:

$$\cos\ \beta = \frac{\pi}{3} rad$$

Resposta esperada: O ângulo que maximiza a área do trapézio é $\frac{\pi}{3} rad$.