P2 2014.2 Adaptada FEI

Exercício 2 Regra de L'Hospital

Resolução

2. Aplicando a Regra de *L'Hospital*, calcule o $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+25x^2)}{x\,arctg(5x)}$**.**

O primeiro passo na resolução de um limite é verificar se podemos obter o resultado por **substituição direta**.

No entanto, substituindo x por 0 na função, obtemos:

$$\frac{ln(1)}{0\cdot arctg(5\cdot 0)}=\frac{0}{0}$$

Ou seja, tentando resolver o limite por substituição direta, obtemos uma **indeterminação** do tipo $\frac{0}{0}$, o que nos possibilita usar a Regra de *L'Hospital*.

Segundo essa regra, caso as derivadas de f e g existam:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Então, para aplicar essa regra, precisamos calcular a derivada das funções que estão no numerador e no denominador.

Para o numerador, usando a Regra da Cadeia:

$$f'\left(ln(1+25x^2)\right)=\frac{1}{1+25x^2}\cdot 50x$$

Para o denominador, temos, usando a Regra do Produto e da Cadeia:

$$f'\left(xarctg(5x)\right)=f'(x)\cdot arctg(5x)+x\cdot f'\left(arctg(5x)\right)=$$

$$= 1 \cdot arctg(5x) + x\frac{1}{1+(5x)^2} \cdot 5 = arctg(5x) + \frac{5x}{1+25x^2}$$

Obtemos, então, a fração:

$$\frac{\frac{1}{1+25x^2} \cdot 50x}{arctg(5x) + \frac{5x}{1+25x^2}} = \frac{50x}{(1+25x^2)arctg(5x) + 5x}$$

Portanto, segundo a Regra de *L'Hospital*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+25x^2)}{xarctg(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{50x}{(1+25x^2)arctg(5x) + 5x}$$

Agora, tentamos resolver o segundo limite também por substituição direta. Como obtemos mais uma vez uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$:

$$\frac{50 \cdot 0}{(1+25 \cdot 0^2)\, arctg(5 \cdot 0) + 5 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

Aplicando **novamente** a Regra de *L'Hospital*, temos, para o numerador:

$$f'(50x) = 50$$

E para o numerador, usando a Regra do Produto:

$$f'\big((1+25x^2) \cdot arctg(5x) + 5x\big) =$$

$$= 50 \cdot x \cdot arctg(5x) + (1 + 25x^2) \frac{5}{1 + 25x^2} + 5 =$$

$$= 50 \cdot x \cdot arctg(5x) + 10$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{50x}{(1 + 25x^2)arctg(5x) + 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{50}{50x\, arctg(5x) + 10}$$

Agora sim, podemos substituir $x = 0$ diretamente na equação.

$$\frac{50}{50 \cdot 0 \cdot arctg(5 \cdot 0) + 10} = \frac{50}{10} = 5$$

Como não há mais indeterminação, este é o valor do limite solicitado.

Resultado esperado: 5