www.estudar.com.vc

P2 2014.2 FEI Adaptada

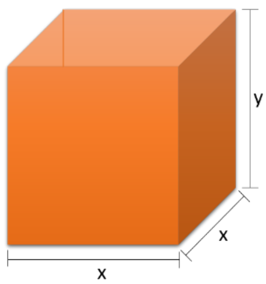
Exercício 4 Problema de Otimização

Explicação

4. O volume de uma caixa retangular reta, sem tampas, de base quadrada é de $500\ \mathrm{cm}^3$. Determinar, através da pesquisa de máximos e mínimos, as dimensões dessa caixa de modo que o "custo" C (área de material gasto) para a confecção seja mínimo.

Neste exercício, precisamos encontrar as dimensões da caixa que minimizam sua **superfície total**, de modo a minimizar o gasto com material.

A caixa possui base quadrada e não possui tampa. Então, se denotarmos o lado da base quadrada por x e a altura da caixa por y, sua área total é dada por:



$$A_{total} = A_{base} + 4A_{lado} = x^2 + 4xy$$

O custo C com material é diretamente proporcional à essa superfície total. Então, podemos escrever:

$$\mathrm{C} = x^2 + 4xy$$

Observemos que C depende de duas variáveis, o lado da base x e a altura y. Para minimizar C, seria ideal escrever C em função de apenas uma variável.

Para fazer isso, podemos utilizar o fato de que o **volume da caixa** é **igual** a $\mathbf{500\ cm^3}$. Como o volume da caixa é expresso por $V = x^2y$, temos que:

$$y = \frac{500}{x^2}$$

Substituindo y na expressão do custo C, obtemos:

$$C(x) = x^2 + 4x\frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{\mathrm{x}}$$

Assim, conseguimos escrever o custo como função **apenas** de x.

Sabemos que o ponto de mínimo de uma função f é um **ponto crítico**, e por isso, a derivada da função se anula.

Então, calculando a derivada, temos que $C'(\mathrm{x})$ é:

$$C'(\mathrm{x}) = 2x - \frac{2000}{x^2}$$

Para encontrar os pontos x_0 tais que $C'(x_0) = 0$, basta igualar a função a zero:

$$2x_0 - \frac{2000}{{x_0}^2} = 0 \Leftrightarrow x_0^3 = 1000 \Leftrightarrow x_0 = 10 \text{ cm}$$

Ou seja, $x_0 = \ 10$ é o único ponto crítico de f. No entanto, isso não indica se esse ponto é de máximo ou de mínimo.

Para descobrir, podemos usar o **Teste da Segunda Derivada.** A segunda derivada de C é:

$$C''(x) = 2 + \frac{4000}{x^2}$$

Notemos que $C''(x) > 0, \forall x > 0$. Em particular, $C''(10) > 0$.

Isso indica que o ponto crítico $x_0 = 10$ é um ponto de **mínimo local** da função C. Mas como é o único ponto de mínimo local, esse ponto também é de **mínimo global.**

Resta calcular a altura da caixa. Vimos, no início da resolução, que o volume de $500\ cm^3$ da caixa impõe a seguinte relação: $y = \frac{500}{x^2}$. Substituindo $x = 10$, temos que:

$$y = \frac{500}{x^2} = \frac{500}{100} = 5$$

Resposta esperada: a caixa de custo mínimo tem lado da base igual a 10 cm e altura igual a 5 cm.