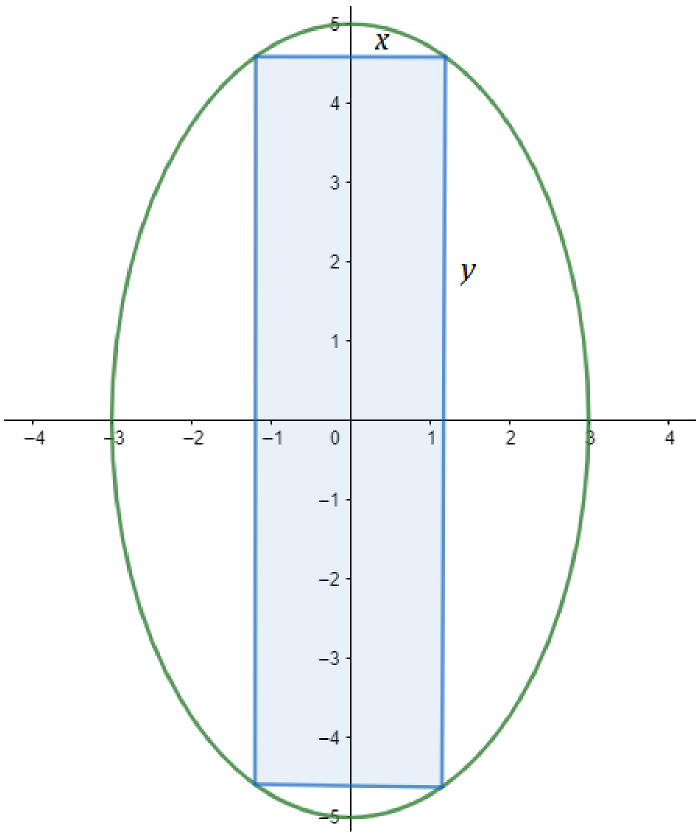
www.estudar.com.vc

P3 2016.1 FEI
Adaptada
Exercício 3 Máximos e Mínimos
Explicação

3. Pela pesquisa de máximo e de mínimo de uma função, calcular a área máxima do retângulo $ABCD$ de lados paralelos aos eixos cartesianos inscrito na elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Vamos desenhar nosso problema, para termos uma visualização melhor:



Queremos descobrir o retângulo de área máxima, então, precisamos maximizar a função:

$$A = 2x \cdot 2y = 4xy$$

Para isso, vamos **derivar** essa função e **igualar a 0** para encontrar seus pontos críticos.

Essa função, porém, depende de duas variáveis. Precisamos colocar uma delas em função da outra.

Pra fazer isso, basta lembrar que esse retângulo está inscrito em uma elipse, assim, vale que:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Logo:

$$\frac{y^2}{25} = 1 - \frac{x^2}{9} \Rightarrow \frac{y^2}{25} = \frac{9 - x^2}{9}$$

$$y = \frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$$

Agora temos y em função de x, podemos jogar na expressão da área:

$$A = 4x \cdot \left(\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}\right)$$

$$A = \frac{20}{3} \cdot x \cdot \sqrt{9 - x^2}$$

Derivando essa função pela Regra do Produto:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$A = \frac{20}{3} \cdot x \cdot \sqrt{9 - x^2}$$

$$A' = \frac{20}{3}\left[1 \cdot \sqrt{9 - x^2} + x\left(\frac{1}{2\sqrt{9 - x^2}} \cdot (-2x)\right)\right]$$

$$A' = \frac{20}{3}\left[\sqrt{9 - x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\right]$$

Igualando os denominadores:

$$A' = \frac{20}{3}\left[\frac{\sqrt{9 - x^2}\left(\sqrt{9 - x^2}\right)}{\sqrt{9 - x^2}} + \frac{-x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\right] = \frac{20}{3}\left[\frac{9 - x^2 - x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\right]$$

$$A' = \frac{20}{3}\left[\frac{9 - 2x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\right] = \frac{20(9 - 2x^2)}{3\left(\sqrt{9 - x^2}\right)}$$

Para encontrar os pontos críticos, vamos igualar a derivada a 0. Como o denominador não pode ser 0, sabemos que $x \neq \pm 3$ e só precisamos analisar o numerador:

$$20(9 - 2x^2) = 0$$

$$9 - 2x^2 = 0$$

Encontrando as raízes desse polinômio, vamos ter:

$$x_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Como estamos falando de tamanho, a resposta x_1 pode ser desconsiderada.

O polinômio $9 - 2x^2 = 0$ é uma parábola com a concavidade para baixo, então:

$$-\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad\qquad \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

-	+	-

A derivada era positiva antes da raiz e ficou negativa após a raiz, ou seja, a função da área era crescente e ficou decrescente. Logo, $x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ é um ponto de máximo.

A área máxima vai ser:

$$A_{max} = \frac{20}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{9 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$A_{max} = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{9 - \frac{18}{4}}$$

$$A_{max} = 10\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$A_{max} = 30$$

Resposta esperada: $\mathbf{30\ u.a.}$