Cálculo I

P3 2014.2 FEI Adaptada

Exercício 2 Regra de *L'Hospital*

Resolução

2. Calcule o limite $\frac{x^2}{\sqrt{2-\cos^2 x}-1}$

Se tentarmos resolver esse limite por substituição direta, obtemos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Podemos então aplicar a **Regra de L'Hospital**, derivando o numerador e o denominador. Dessa forma, tem-se:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{2-\cos^2 x}-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{2-\cos^2 x}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2)'}{\left(\sqrt{2-\cos^2 x}-1\right)'}$$

Derivando o numerador e o denominador, obtém-se:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\frac{1}{2\sqrt{2-\cos^2 x}} . 2 \sin x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{4x\sqrt{2-\cos^2 x}}{\sin 2x}$$

Observe que na última passagem acima se utilizou a identidade trigonométrica

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Tentando resolver o novo limite por substituição direta, ainda obtemos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Podemos então aplicar novamente a regra de **L'Hospital**, derivando novamente o numerador e o denominador:

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x\sqrt{2-\cos^2 x}}{\sin 2x} = 4 \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2-\cos^2 x} - x . \frac{2 \sin x \cos x}{2\sqrt{2-\cos^2 x}}}{2 \cos 2x}$$

Resolvendo por substituição direta, não há mais indeterminação:

$$4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-\cos^2 x}-x.\dfrac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{2-\cos^2 x}}}{2\cos 2x}=4.\frac{\left(\sqrt{2-1}-0\right)}{2.1}=2$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{2-\cos^2 x}-1}=2$$

Resposta esperada: $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{2-\cos^2 x}-1}=2}$

Observação: O seguinte limite $\lim_{x\to 0}\frac{4x\sqrt{2-\cos^2 x}}{\sin 2x}$, poderia ser calculado da seguinte forma:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x\sqrt{2-\cos^2 x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2x\sqrt{2-\cos^2 x}}{\sin 2x}$$

Notando que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}=1\ (limite\ fundamental)$$

E calculando o outro limite por substituição direta:

$$\lim_{x\to 0}2\sqrt{2-\cos^2 x}=2$$

Como os limites acima são finitos, podemos utilizar a regra do produto, assim:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2x\sqrt{2-\cos^2 x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}2\sqrt{2-\cos^2 x}=1\cdot 2=2$$