www.estudar.com.vc

Cálculo I

P3 2014.2 FEI Adaptada

Exercício 3 Reta Tangente

Resolução

3. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}\,(x-2)}$, com $\boldsymbol{x \geq 0}$ e que seja perpendicular à reta $\boldsymbol{4x + 2y + 99 = 0}$.

A reta $r: 4x + 2y + 99 = 0$ pode ser reescrita na forma

$$y = -\frac{4}{2}x - \frac{99}{2}$$

ficando evidente que seu coeficiente angular é $m_r = -\frac{4}{2} = -2$.

A reta s que buscamos deve ser perpendicular à reta r, ou seja, seu coeficiente angular m_s satisfaz

$$\boldsymbol{m_s m_r = -1}$$

Portanto,

$$m_s = \frac{1}{2}$$

A inclinação (ou coeficiente angular) de uma reta tangente ao gráfico de uma função f em um dado ponto x_0 é igual à derivada de f nesse ponto, $f'(x_0)$.

Para a função dada no exercício, $f(x) = \sqrt{x}\,(x-2)$, temos, usando a regra do produto, que

$$f'(x) = \frac{x-2}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{3x-2}{2\sqrt{x}}$$

Devemos então buscar o ponto x_0 tal que $f'(x_0) = m_s$, ou seja:

$$\frac{3x_0 - 2}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (3x_0 - 2)^2 = x_0 \Rightarrow 9x_0^2 - 13x_0 + 4 = 0$$

Essa equação do segundo grau possui raízes $\mathbf{1}$ e $\mathbf{\frac{4}{9}}$. Note, no entanto, que obtivemos uma raiz a mais em relação à equação original $\left(\frac{3x_0-2}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2}\right)$, uma vez que essa equação foi elevada ao quadrado. De fato, verificamos que $\mathbf{\frac{4}{9}}$ não resolve essa equação, pois $\frac{3.\frac{4}{9}-2}{2\sqrt{\frac{4}{9}}} = -\frac{1}{2}$.

Adotamos, portanto, $x_0 = 1$. Nesse ponto, temos

$$f(x_0) = f(1) = -1$$

$$f'(x_0) = m_s = \frac{1}{2}$$

Finalmente, como a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0 é dada por:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Temos que a reta pedida é:

$$y = -1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

Resposta esperada: $\boldsymbol{y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}}$