www.estudar.com.vc

Cálculo I

P3 2014.2 FEI Adaptada

Exercício 4 Otimização

Resolução

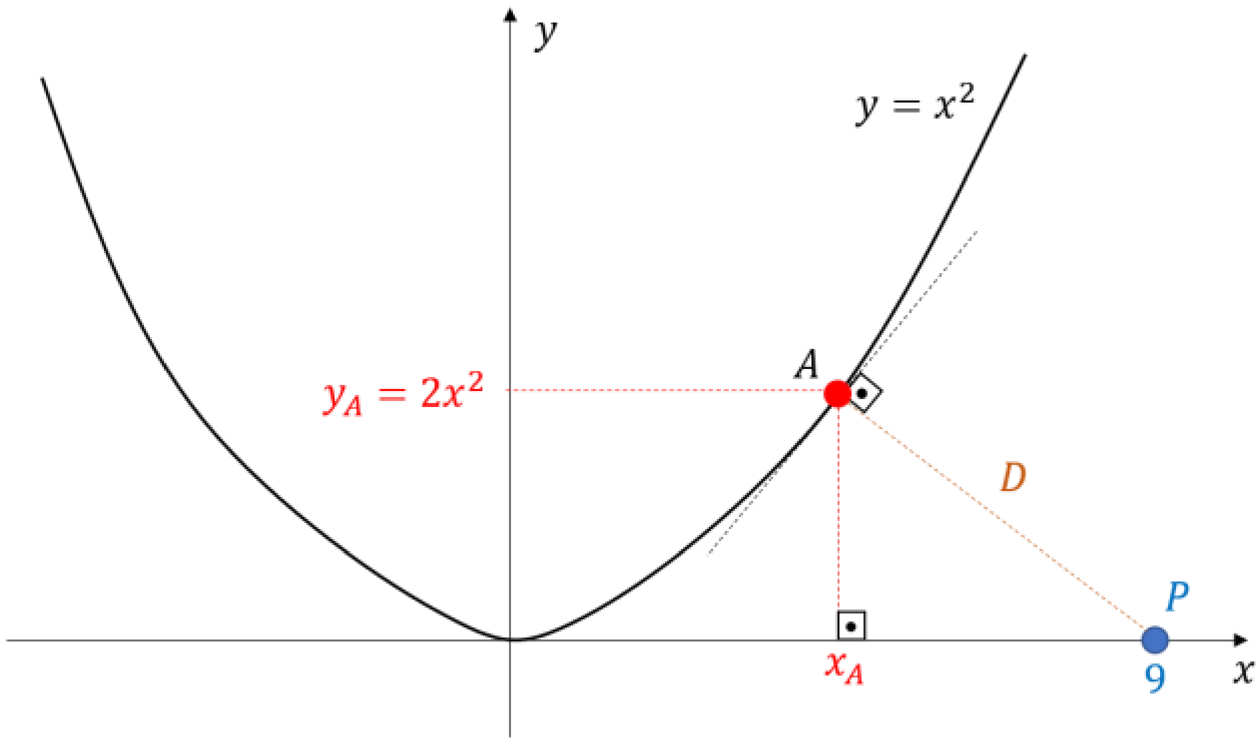
4. Determine a distância mínima entre o ponto $\boldsymbol{P(9,0)}$ e a parábola $\boldsymbol{y = 2x^2}$.

A distância mínima entre o ponto P e parábola dada é a distância entre P e o ponto A, pertencente à parábola, que está mais próximo de P.

Como A pertence à parábola, suas coordenadas são $(x_A, y_A) = (x, 2x^2)$.

Como mostra a figura a seguir, a distância entre P e A é dada por

$$D(x) = \sqrt{(x-9)^2 + (2x^2 - 0)^2} = \sqrt{4x^4 + x^2 - 18x + 81}$$



Nosso objetivo é minimizar a função $\boldsymbol{D(x)}$. Para isso, buscamos seus pontos críticos, isto é, os pontos nos quais sua primeira derivada se anula. Temos que

$$D'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^4 + x^2 - 18x + 81}} . (16x^3 + 2x - 18) = \frac{8x^3 + x - 9}{\sqrt{4x^4 + x^2 - 18x + 81}}$$

Observe que $D'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^3 + x - 9 = 0$ e que $x = 1$ é uma raiz dessa equação do terceiro grau. Além disso, podemos concluir que $x = 1$ é a única raiz real dessa equação, pois podemos fatorá-la, obtendo um polinômio do segundo grau que não possui raízes reais:

$$8x^3 + x - 9 = (x-1)(8x^2 + 8x + 9)$$

Portanto, $\boldsymbol{x = 1}$ é o único ponto crítico de $\boldsymbol{D'(x)}$. Resta verifica se esse ponto é de máximo ou de mínimo. Para isso, podemos utilizar o teste da segunda derivada. Calculando $D''(x)$, por meio da regra do quociente, temos que:

$$D''(x) = \frac{(24x^2 + 1)\sqrt{4x^4 + x^2 - 18x + 81} - \dfrac{(8x^3 + x - 9)^2}{\sqrt{4x^4 + x^2 - 18x + 81}}}{(4x^4 + x^2 - 18x + 81)^2}$$

Observe que

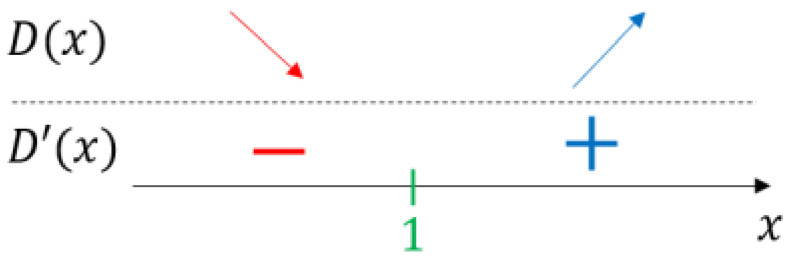
$$D''(1) = \frac{25.\sqrt{68} - 0}{68^2} > 0$$

Como a segunda derivada é positiva no ponto crítico $x = 1$, concluímos que ele é um ponto de mínimo de $\boldsymbol{D(x)}$.

Uma maneira alternativa de se chegar à mesma conclusão é por meio do teste da primeira derivada. Utilizando a fatoração que realizamos acima, temos que

$$D'(x) = \frac{(x-1)(8x^2 + 8x + 9)}{\sqrt{4x^4 + x^2 - 18x + 81}}$$

Observe que o denominador e o fator de segundo grau no numerador são sempre positivos. Assim, o sinal de $\boldsymbol{D'(x)}$ é determinado pelo sinal de $\boldsymbol{x-1}$. Como mostra a figura a seguir, $D'(x)$ é negativo para $x<1$ e positivo para $D'(x)>1$.



Isso implica que D é decrescente antes de $x=1$, e crescente depois de $x=1$. Como consequência, $\boldsymbol{x=1}$ é ponto de mínimo.

Portanto, a distância mínima entre $P(9,0)$ e a parábola $y=2x^2$ é $D(1)=\sqrt{68}$.

Resposta esperada: A distância mínima entre $\boldsymbol{P}$ e a parábola é $\boldsymbol{\sqrt{68}}$.