www.estudar.com.vc

Resumo e Lista de Exercícios

Probabilidade

Fuja do Nabo P1 2019.1

Resumo

1. Métodos de Contagem

Os Métodos de Contagem permitem contar o número de elementos de um determinado conjunto, **de forma indireta** (ou seja, sem somar elemento por elemento).

a. Permutação

A permutação ocorre quando há, dentro de um conjunto, elementos que são **trocados** entre si.

A equação abaixo identifica quantas formas **diferentes** o conjunto pode assumir, tendo em vista as trocas ocorridas. Se n é o número de elementos **diferentes** do conjunto, a permutação desses n elementos é:

$$P_n = n!$$

Note que, se houverem k elementos repetidos no conjunto, a permutação deverá **descontar** as trocas entre tais elementos, ou seja:

$$P_{n,k} = \frac{n!}{k!}$$

b. Arranjos

O arranjo é utilizado quando temos um conjunto com N elementos e queremos saber quantos **subconjuntos** diferentes (com n elementos) podemos formar (desde que $n < N$).

A **ordem dos elementos no subconjunto importa** (por exemplo, um subconjunto $\{A; B\}$ é diferente de um subconjunto $\{B; A\}$). O número de arranjos de um conjunto com N elementos, tomados n a n, é:

$$A_{N,n} = (N)_n = \frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1)\dots(N-n+1)$$

c. Combinação

A combinação é utilizada na mesma situação dos arranjos, mas a **ordem dos elementos no subconjunto não importa**. Por exemplo, um subconjunto $\{A; B\}$ e um subconjunto $\{B; A\}$ são iguais.

Desta forma, a combinação de N elementos, n a n (pode-se ler também como "N escolhe n") será:

$$C_{N,n} = \binom{N}{n} = \frac{(N)_n}{P_n} = \frac{(N)_n}{n!} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

2. Probabilidades

a. Probabilidade da União

A Probabilidade da União é utilizada para calcular a probabilidade de um **evento A e um evento B ocorrerem** em uma mesma ocasião. Essa probabilidade é calculada como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

b. Probabilidade Condicional

A Probabilidade Condicional é utilizada para calcular a probabilidade de um evento A ocorrer, **dado que outro evento B já ocorreu**.

Por isso, essa probabilidade é dada pela **razão** entre a probabilidade da ocorrência da **intersecção** dos eventos, pela probabilidade de **somente o evento B** ocorrer:

$$P(\,A \mid B\,) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

c. Regra da Multiplicação para $P(A \cap B)$:

Por conta da regra acima, a probabilidade da ocorrência da **intersecção entre dois eventos A e B** é:

$$P(A \cap B) = P(\,A \mid B\,) \cdot P(B) = P(\,B \mid A\,) \cdot P(A)$$

d. Independência

Dois eventos A e B são ditos **independentes** se a ocorrência de um não interfere na ocorrência de outro.

Por isso, a probabilidade de ocorrer A dado que ocorreu B é, simplesmente, a probabilidade de ocorrer A:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

Ou seja, a probabilidade da ocorrência da intersecção entre os eventos é:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

f. Eventos Mutuamente Excludentes

Diferentemente do caso da independência, dois eventos são considerados mutuamente excludentes se **não existe intersecção** entre os eventos, ou seja:

$$A \cap B = \emptyset$$

Neste caso, a probabilidade da união é a soma das probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

e. Teorema da Probabilidade Total

O Teorema da Probabilidade Total diz que a probabilidade de um evento B ocorrer é a **soma** da probabilidade de todas as intersecções do próprio evento B com as partições do evento A (A_i):

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(\, B \mid A_i \,) \cdot P(A_i)$$

Esse teorema só é válido se as partições A_i forem **mutuamente excludentes**.

f. Teorema de *Bayes*

Sejam dois eventos A e B, e A_i uma partição do evento A. De acordo com o **Teorema de *Bayes***, a seguinte relação é verdadeira:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(B)}$$

Ou, usando o Teorema da Probabilidade Total:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B \mid A_n)}$$

Esse teorema só é válido se as partições A_i forem **mutuamente excludentes**.

g. Probabilidade Complementar

Considere um evento A e seu complemento, A^C, tal que a união dos eventos gera o espaço amostral S:

$$A \cup A^C = S$$

A probabilidade do evento complementar A^C ocorrer é:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

3. Variáveis Aleatórias Discretas

Uma Variável aleatória é **discreta** se ela é **enumerável** (ou seja, podemos listar cada valor que a variável pode assumir, por exemplo, x_1, x_2, até um x_n, que é o valor final assumido).

Variáveis aleatórias discretas podem progredir até o infinito, de forma que a lista de valores continua indefinidamente.

a. Distribuição de Probabilidade

A probabilidade de a variável aleatória X assumir um valor x, dentro de um espaço amostral S (cujos elementos são s) é:

$$P[X = x] = P\ (para\ todos\ s \in S : X(s) = x)$$

b. Distribuição Acumulada

A distribuição acumulada considera a possibilidade da variável aleatória X assumir qualquer valor **menor ou igual** a um x.

Isso é dado pela **somatória** de todas as probabilidades em que X assume valores y, para todo $y \leq x$:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y:\, y \leq x} P[X = y]$$

c. Propriedades

A probabilidade da variável aleatória X assumir um valor x está entre 0 (no mínimo) e 1 (no máximo):

$$0 \leq P[X = x] \leq 1$$

Além disso, a soma de todas as probabilidades em que X assume valores x, para todos os x dentro do espaço amostral S, é 1:

$$\sum_{todos\ os\ possíveis\ x} P[X = x] = 1$$

4. Variáveis Aleatórias Contínuas

Uma variável aleatória X é **contínua** se os valores que ela pode assumir pertencem a um **intervalo** (ou seja, existem infinitas possibilidades de valores x que ela pode assumir, desde que pertençam a esse intervalo).

a. Densidade de Probabilidade

Para as variáveis aleatórias contínuas, fala-se em **função densidade de probabilidade** (abreviada por f.d.p.), tal que:

I. A função $f(x)$ é sempre **positiva** (ou nula):

$$f(x) \geq 0 \text{ para todo } x;$$

II. A **integral** da f.d.p., de menos infinito até infinito, vale 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1 \text{ (área sob o gráfico de } f(x)\text{);}$$

III. E a probabilidade da variável aleatória X estar dentro de um intervalo $[a; b]$ é dada pela **integral da f.d.p., de a até b**:

$$P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx, \text{ com } a \leq b.$$

b. Distribuição Acumulada

Assim como no caso discreto, a **distribuição acumulada** representa a probabilidade de X assumir qualquer valor **menor ou igual** a x.

No entanto, no caso contínuo, a distribuição acumulada é dada por uma **função** $F(x)$, dada pela **integral** da f.d.p., de menos infinito até o valor x:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Assim, a **função distribuição acumulada** representa a **primitiva** da função densidade de probabilidade, tal que:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

c. Propriedades

A probabilidade da variável aleatória X ser maior do que um valor a é a probabilidade **complementar** ao caso em que X é **menor ou igual** ao valor a (que é dado pela função distribuição acumulada em a):

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$

A probabilidade de X estar entre a e b é dada pela integral de $f(x)$, limitada pelos extremos a e b. Portanto, isso é igual à primitiva $F(x)$, calculada em b, menos a primitiva calculada em a:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Por fim, a probabilidade de X ser algum ponto c do intervalo é **nula**:

$$P(X = c) = \int_{c}^{c} f(x)dx = 0$$

5. Medidas Descritivas

Em Probabilidade, dada uma distribuição contínua ou discreta, calculamos algumas **medidas descritivas** que identificam as principais métricas da população, em relação a sua **posição** ou sua **dispersão**.

a. Valor Médio ou Esperança

É o **valor esperado** (E) para a variável aleatória ou função.

No caso de **distribuições discretas**, o valor esperado da variável é:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot P[X = x_i]$$

De forma similar, considerando a mesma distribuição, o valor esperado de uma função $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ qualquer é:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{N} g(x_i) \cdot P[X = x_i]$$

No **caso contínuo**, o valor esperado da variável x é dado pela seguinte integral:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Enquanto o valor esperado de uma função $f(x)$ é:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)dx$$

O valor esperado pode ser interpretado como uma **medida da localização do centro** da variável aleatória.

A função de esperança é **linear**, e, por isso, ela apresenta as seguintes propriedades:

I. Dadas uma **constante** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ e uma **constante** $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$, a seguinte propriedade é válida:

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$

II. O **valor esperado da soma** de duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 é a **soma dos valores esperados** de X_1 e X_2:

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

III. Considere duas variáveis aleatórias **independentes**, X e Y. O **valor esperado do produto** das variáveis é o **produto dos valores esperados**:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

b. Variância

A **variância** ($\sigma^2(X)$ ou $Var(X)$) é uma medida da **variabilidade** da distribuição de uma variável aleatória. O cálculo da variância utiliza o conceito de **valor esperado**:

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Algumas propriedades da variância são:

I. Se a é uma **constante** real, então:

$$Var(X + a) = Var(X)$$

II. Se a é uma **constante** real, então:

$$Var(aX) = a^2 Var(X)$$

III. Se X e Y são variáveis aleatórias **independentes**, a variância da soma das variáveis é a soma das variâncias:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

c. Desvio Padrão

O **desvio padrão** (σ) mede a **dispersão** entre a variável aleatória e a média:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$$

d. Momento da Função

O **momento de ordem *k*** de uma função é definido pela seguinte equação:

I. Para o caso discreto:

$$E[X^k] = \sum_{i=1}^{N} {x_i}^k \cdot P[X = x_i]$$

II. Para o caso contínuo:

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx$$

A **esperança** de uma função é o **momento de primeira ordem** dela, enquanto a **variância** é a **diferença** entre o **momento de segunda ordem** e o **quadrado do momento de primeira ordem**.

Lista de Exercícios

1. Espaço Amostral

P1 2018.1 Probabilidade Poli USP, Exercício 4 Adaptado

Um experimento consiste em jogar uma moeda duas vezes, e anotar os resultados independente da ordem. Por exemplo, anota-se $\{K, C\}$, independente de C ter saído antes de K. Se saírem duas caras, anota-se $\{K, K\}$. Para esse experimento, o espaço amostral é:

A. $\{\{K\}, \{C\}\}$
B. $\{\emptyset, \{K\}, \{C\}, \{K, K\}, \{C, C\}, \{K, C\}, \{C, C\}\}$
C. $\{\emptyset, \{K\}, \{C\}\}$
D. $\{\{K\}, \{C\}, \{K, K\}, \{C, C\}, \{K, C\}, \{C, C\}\}$
E. $\{\{K, K\}, \{C, C\}, \{K, C\}\}$

2. Probabilidade Complementar

P1 2016.1 Probabilidade Poli-USP, Exercício 4

Uma usina hidrelétrica possui duas unidades geradoras G_1 e G_2.

Devido a problemas de manutenção e eventuais defeitos de funcionamento das turbinas, as probabilidades que em uma dada semana, as unidades 1 e 2 estejam paradas (eventos que chamamos de E_1 e E_2) são, respectivamente, 0,1 e 0,2.

Em uma semana de verão, existe uma probabilidade de 10% que o tempo esteja extremamente quente, com temperatura média acima de $35^o\ C$;

chamemos esse evento de H, de forma que a demanda de potência para ar condicionado aumenta consideravelmente.

O desempenho da hidrelétrica pode ser classificado de acordo com a sua capacidade de suprir a demanda de potência em uma semana qualquer da seguinte maneira:

Satisfatória $(\boldsymbol{S})$: se ambas as unidades estão funcionando e temperatura média está abaixo de $35^o\ C$;
Crítica $(\boldsymbol{C})$**:** se uma das unidades está parada e temperatura média está acima de $35^o\ C$;
Marginal $(\boldsymbol{M})$**:** em todos os outros casos.

Fazendo a hipótese de independência estatística entre H e E_1 e E_2, a probabilidade de $P(M)$ é aproximadamente:

A. $0{,}03$
B. $0{,}25$
C. $0{,}32$
D. $0{,}65$
E. $0{,}80$

3. Teorema do Produto e Probabilidade Condicional

P1 2018 Probabilidade Poli USP, Exercício 1

A, B e C são eventos de um mesmo espaço amostral, tais que $P(B) = 0{,}5$, $P(C) = 0{,}3$, $P(B|C) = 0{,}4$ e $P(A|B \cap C) = 0{,}5$. O valor de $P(A \cap B \cap C)$ é:

A. 0,15
B. 0,50
C. 0,12
D. 0,20
E. 0,06

4. Teorema da Probabilidade Total

P1 2016 Probabilidade Poli USP, Exercício 1 Adaptado

Sabe-se que a probabilidade de a intensidade de radiação solar atingir um certo nível máximo é $\frac{1}{4}$ para dias chuvosos e $\frac{7}{8}$ para dias não chuvosos. Sabe-se também que para uma certa localidade a probabilidade de dia chuvoso é $\frac{9}{25}$. Qual a probabilidade de ocorrer esse valor máximo de radiação solar?

A. 0,09
B. 0,65
C. 0,56
D. 0,78
E. 0,25

5. Teorema de *Bayes*

P1 2016 Probabilidade Poli USP, Exercício 6 Adaptado

O IPEM fez uma amostra de combustível em postos de gasolina. Sabe-se que 5% dos postos tem combustível adulterado. O teste do IPEM detecta adulteração em 90% dos casos em que a gasolina está adulterada. Em 5% dos casos erra e indica adulteração quando a gasolina está boa. Uma amostra ao acaso é testada e indica adulteração. Qual a chance de a gasolina estar realmente adulterada?

A. 0,9000
B. 0,0925
C. 0,4865
D. 0,0450
E. 0,9800

6. Teorema de *Bayes*

P1 2016.1 Probabilidade Poli-USP, Exercício 5

O gerente de um clube calculou que a probabilidade de receber 1000 visitantes ou mais em qualquer domingo de julho depende da temperatura máxima desse dia e varia de acordo com a seguinte tabela:

Temperatura (^oC)	Probabilidade de 1000 ou mais visitantes	Probabilidade de temperatura
$<\ 20$	0,25	0,20
20 – 25	0,50	0,25
25 – 30	0,75	0,30
$>\ 35$	0,75	0,25

Num certo domingo o clube recebe mais de 1000 visitantes. Qual a probabilidade aproximada de que a temperatura fique entre $25 - 30^oC$?

A. $\frac{47}{80}$
B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{100}$
D. $\frac{18}{47}$
E. $\frac{1}{5}$

7. Eventos e Variáveis

P1 2017.1 Probabilidade Poli USP, Exercício 8

Seja um experimento que consiste em se sortear uma vez um número real x do conjunto $S = [0; 1]$. A distribuição de probabilidade para a variável aleatória X que corresponde ao experimento é uniforme (tem valor constante). Sejam também os eventos $A = \left\{x \in S: x \in \left[0; \frac{1}{4}\right]\right\}$, $B = \left\{x \in S: x \in \left[\frac{1}{8}; \frac{5}{8}\right]\right\}$ e $C = \left\{x \in S: x = \frac{1}{2}\right\}$. Considere as seguintes afirmações abaixo:

I. Os eventos A e B são mutuamente excludentes.
II. Os eventos A e B são independentes.
III. Como $P(C) = 0$, o evento é impossível.

Então a alternativa correta é:

A. Só II é verdadeira.
B. Só I é verdadeira.
C. Só I e II são verdadeiras.
D. Só III é verdadeira.
E. Só II e III são verdadeiras.

8. Função Probabilidade

P1 2018.1 Probabilidade Poli USP, Exercício 3

Considere as afirmações abaixo:

I. Seja $S = [0; 1] \subset \mathbb{R}$ o espaço amostral de um experimento. Existe uma função probabilidade que associa a cada $x \in S$ um número positivo não nulo.
II. Seja S um conjunto enumerável com uma quantidade infinita de elementos. Existe uma função probabilidade que associa a cada $x \in S$ um número positivo não nulo.
III. Seja S um conjunto com uma quantidade finita de elementos. Existe uma função probabilidade que associa a cada $x \in S$ um número positivo não nulo.

Então, a alternativa correta é:

A. Só II e III são verdadeiras.
B. Só I e III são verdadeiras.
C. Só III é verdadeira.
D. Todas são verdadeiras.
E. Só I é verdadeira.

9. Variável Aleatória Discreta

P1 2016 Probabilidade Poli USP, Exercício 10 Adaptado

Seja X uma variável aleatória discreta com distribuição de probabilidade dada por $P[X = x] = ax$ para $x \in \{0,1,2,3,4,5\}$, sendo a uma constante. O valor de $P(X > 2)$ é:

A. $\frac{1}{5}$
B. $\frac{2}{5}$
C. $\frac{4}{5}$
D. $\frac{3}{5}$
E. $\frac{3}{4}$

10. Variáveis Discretas

P1 2016.1 Probabilidade Poli-USP, Exercício 13

Considere o experimento de lançamento de dois dados honestos. Seja X igual à diferença entre os dois valores obtidos nos lançamentos.

Considere as seguintes proposições:

I. $P[X = -x] = P[X = x]$
II. $P[X = 3] = P[X = 4] + P[X = 5]$
III. $P[X = x] = P[X = x - 1] + \frac{1}{36}$ para x positivo
IV. $P(X > 1) = 1 - P(X < 1)$

Quais as proposições estão corretas?

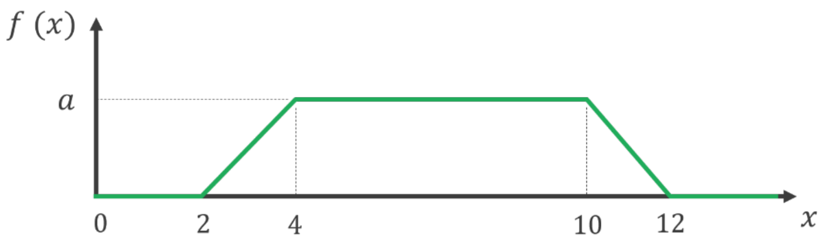
A. Apenas II.
B. Apenas III e IV.
C. Apenas I, II e III.
D. Apenas I, II e IV.
E. Apenas I e II.

11. Função Densidade de Probabilidade

P1 2016.1 Probabilidade Poli-USP, Exercício 11

Um sistema é constituído de três componentes idênticos. Sabe-se que se pelo menos dois componentes devem funcionar para que o sistema opere corretamente. Considere que cada componente opera de forma independente dos demais.

Qual a probabilidade de o sistema operar por mais de 9 mil horas? O tempo de vida X de cada componente é expresso pela função densidade de probabilidade apresentada abaixo, onde x é expresso em mil horas.



A. $a^2(1-a)$
B. $\frac{1}{16}$

C. $\frac{5}{32}$
D. $a(1-a)^2$
E. $\frac{3}{4}$

12. Distribuição Acumulada, Caso Contínuo

P1 2016 Probabilidade Poli USP, Exercício 15 Adaptado

Uma variável aleatória X tem função distribuição de probabilidade dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax}, \text{se } x \geq 0 \\ 0 \text{, caso contrário} \end{cases}$$

Sendo $a > 0$ uma constante real. A probabilidade $P(X \geq \frac{1}{2a})$ vale:

A. e^{-a}
B. $e^{-1/2}$
C. $e^{-a/2}$
D. $e^{1/2}$
E. $e^{a/2}$

13. Probabilidade de Variável Contínua

P1 2018 Probabilidade Poli USP, Exercício 9

Um pilar de uma ponte é submetido a uma carga concentrada de valor $(1+\theta)/2$. O método construtivo do pilar garante uma resistência à compressão dada pela densidade de probabilidades $f(x)=\theta$ para $0 \leq x \leq \theta$; $f(x)=k$ para $\theta < x < 1$; e $f(x)=0$ para outros valores de x. Calcule a probabilidade de o pilar não resistir à carga (ou seja, a probabilidade que o particular pilar tenha resistência menor do que $(1+\theta)/2$).

A. $(1-\theta)^2/2$
B. $(1+\theta)^2/2$
C. $\theta^2+(1+\theta)^2/2$
D. $(1+\theta^2)/2$
E. Nenhuma das anteriores.

Gabarito

1. Alternativa E.

2. Alternativa C.

3. Alternativa E.

4. Alternativa B.

5. Alternativa C.

6. Alternativa D.

7. Alternativa A.

8. Alternativa A.

9. Alternativa C.

10. Alternativa E.

11. Alternativa C.

12. Alternativa B.

13. Alternativa D.