www.estudar.com.vc

Cálculo III

Fuja do Nabo P1

www.estudar.com.vc

Resumo

Teorema de Fubini – Regiões Retangulares

$R = \{(x, y) \in R^2 / \ a \leq x \leq b \ , c \leq y \leq d\}$

$$\iint_{\boldsymbol{R}} f(x, y) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dydx$$

Teorema de Fubini – Extensão para regiões genéricas

$R = \{(x, y) \in R^2 / \ a \leq x \leq b \ , g(x) \leq y \leq h(x)\}$

$$\iint_{\boldsymbol{R}} f(x, y) = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dydx$$

$R = \{(x, y) \in R^2 / \ g(y) < x < h(y) \ , c < y < d\}$

$$\iint_{\boldsymbol{R}} f(x, y) = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dxdy$$

Mudança de Coordenadas - Linear

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

$$\iint_{\boldsymbol{R}} f(x, y) \, dxdy = \iint_{\boldsymbol{D}} f(u, v) |Jac| dudv$$

$|Jac| \rightarrow Jacobiano \ da \ mudança$

$$|Jac| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\|$$

Mudança de Coordenadas – Polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$r \rightarrow distância\ em\ relação\ à\ origem$
$\theta \rightarrow ângulo\ de\ abertura$

$$\iint_{\boldsymbol{R}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\boldsymbol{D}} f(r,\theta)rdrd\theta$$

$|Jac| = r \rightarrow Jacobiano\ das\ polares$

Massa

$$Massa\ de\ uma\ região\ R = \iint_{\boldsymbol{R}} f(x,y)\,dxdy, onde\ f(x,y)\ é\ a\ densidade$$

Centro de Massa

$$Coordenada\ x = \frac{\iint_{\boldsymbol{R}} xf(x,y)\,dxdy}{Massa}$$

$$Coordenada\ y = \frac{\iint_{\boldsymbol{R}} yf(x,y)\,dxdy}{Massa}$$

Volume

$$Volume\ da\ superfície\ f(x,y)\ sobre\ a\ região\ R = \iint_{\boldsymbol{R}} f(x,y)\,dxdy$$

Área

$$Área\ da\ região\ R\ = \iint_{\boldsymbol{R}} 1\,dxdy$$

Teorema de Fubini – Prismas Retangulares

$$E = \{(x,y) \in R^3 /\ a \leq x \leq b\ , c \leq y \leq d\ , e \leq z \leq f\}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\,dzdydx \rightarrow Qualquer\ ordem$$

Teorema de Fubini – Extensão para regiões genéricas

$$E = \{(x,y,z) \in R^3 /\ a \leq x \leq b,\ u_1(x) \leq y \leq u_2(x), v_1(x,y) \leq z \leq\ v_2(x,y)\ \}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} \int_{v_1(x,y)}^{v_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

Mudança de Coordenadas - Linear

$$\begin{cases} x = x(u, v, m) \\ y = y(u, v, m) \\ z = z(u, v, m) \end{cases}$$

$$\iiint_E f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{E'} f(u, v, m)|Jac|dudvdm$$

$|Jac| \rightarrow Jacobiano\ da\ mudança$

$$|Jac| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial m} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial m} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial m} \end{matrix} \right\|$$

Mudança de Coordenadas – Cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \quad z = z \end{cases}$$

$r \rightarrow distância\ em\ relação\ ao\ eixo\ z$
$\theta \rightarrow ângulo\ de\ abertura$

$$\iiint_E f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{E'} f(r, \theta, z)rdrd\theta dz$$

$|Jac| = r \rightarrow Jacobiano\ das\ cilíndricas$

Mudança de Coordenadas – Esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \sin\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ x = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$\rho \;\rightarrow\; Distância\ do\ ponto\ à\ origem$
$\theta \;\rightarrow\; ângulo\ de\ revolução$
$\varphi \;\rightarrow\; Abertura\ em\ relação\ ao\ eixo\ z$

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{E'} f(\rho,\theta,\phi)\rho^2 \sin\phi\, d\rho d\theta d\phi$$

$$|Jac| = \rho^2 \sin\varphi \rightarrow Jacobiano\ das\ esféricas$$

Massa

$$Massa\ de\ E \;=\; \iiint_{E} f(x,y,z)dxdydz\,, onde\ f(x,y,z)\ é\ a\ densidade$$

Centro de Massa

$$Coordenada\ x = \frac{\iiint_E xf(x,y,z)dxdydz}{Massa}$$

$$Coordenada\ y = \frac{\iiint_E yf(x,y,z)dxdydz}{Massa}$$

$$Coordenada\ z = \frac{\iiint_E zf(x,y,z)dxdydz}{Massa}$$

Volume

$$Volume\ da\ região\ E = \iiint_E 1dxdydz$$

Exercícios de Fixação

1. Teorema de Fubini

Elaboração própria

Calcule as seguintes integrais duplas:

a) $\iint_R x + y$, onde R é a região do plano limitada pelas retas $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 2$.

b) Calcule $\iint_R x \cos y$, onde R é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$ e $x = 1$.

2. Mudança de Coordenadas

Lista 1

a) Calcule $\iint_R x\, dxdy$, onde R é o disco de centro na origem e raio 5.

b) Calcule a massa de $D = \{(x, y): (x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 \leq 100\}$, com função densidade $\delta(x, y) = x - 2y + 18$.

3. Teorema de Fubini

Lista 1

Calcule a seguinte integral tripla:

$\iiint_R y\, dxdydz$, onde R é a região abaixo do plano $z = x + 2y$ e acima da região no plano xy limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$.

4. Mudança de Coordenadas - Cilíndricas

Lista 1

Calcule a seguinte integral tripla:

$\iiint_E y\, dxdydz$, onde E é a região entre os cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$, limitada pelo plano xy e pelo plano $z = x + 2$.

5. Mudança de Coordenadas - Esféricas

Elaboração própria

Calcule a massa da região D contida no primeiro octante que é interior ao cone $\varphi = \frac{\pi}{6}$ e à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com função densidade $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exercícios de Prova

1. Teorema de Fubini

P1 - 2017

Calcule a seguinte integral iterada

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y}{\sqrt{1+x^5}}\, dxdy$$

2. Mudança de Coordenadas

P1 - 2016

Calcule $\iint_D (3x+2y)^2 \cos(9x^2-4y^2)\, dxdy$, sendo D a região do plano limitada por $3x+2y=1$, $3x+2y=2$, $x=0$ e $y=0$.

3. Coordenadas Polares

P1 – 2017/2015

a) Calcule a área da região plana entre as retas $3y=\sqrt{3}x$, $y=\sqrt{3}x$ e limitada por $x^2+y^2=2x$.

b) Calcule a área de um laço da rosácea cuja equação em coordenadas polares é dada por $r(\theta)=\cos(5\theta)$.

4. Mudança de Coordenadas - Cilíndricas

P1 - 2016

Calcule a massa do sólido dado por $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2\leq 16, x^2+y^2+\frac{z^2}{9}\geq 1, z\geq 0\right\}$ com densidade $\delta(x,y,z)=x^2+y^2$.

5. Mudança de Coordenadas - Esféricas

P1 - 2015

Calcule a massa do sólido que está contido na parte interna da bola $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$, acima do cone $z = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$ e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, com densidade $\delta(x,y,z) = z$.

6. Mudança de Coordenadas - Esféricas

P1 – 2017

Calcule o volume do sólido $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 2\}$.

Gabarito
Exercícios de Fixação

1.a) 5
 b) $\frac{1-\cos 1}{2}$

2.a) 0
 b) 150π

3. $\frac{5}{28}$

4. 0

5. $\frac{\pi}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$

Exercícios de Prova

1. $\frac{\sqrt{2}-1}{5}$

2. $\frac{\cos 1-\cos 4}{12}$

3.a) $\frac{\pi}{6}$
 b) $\frac{\pi}{20}$

4. $\frac{4084\pi}{15}$

5. $\frac{7\pi}{3}$

6. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$