www.estudar.com.vc

Cálculo I
Fuja do Nabo P1

Resumo

Condição de Existência de um Limite

Se o limite de uma função f existe para quando $x \to a$, então vale que:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Propriedades dos Limites

Soma e subtração: $\lim_{x \to a} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

Multiplicação: $\lim_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

Quociente: $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, desde que $g(x) \neq 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Multiplicação por escalar: $\lim_{x \to a} \left(\beta \cdot f(x) \right) = \beta \cdot \lim_{x \to a} f(x)$, $\beta \in R$

Limite Fundamental Trigonométrico

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{f(x) \to 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$$

Teorema do Confronto

Sejam três funções, $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, tais que:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \text{ para todo } x \neq a.$$

Se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, então pode-se afirmar que $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Continuidade de Funções

Se uma função f é contínua no ponto $x = a$, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Definição de Derivada em um Ponto

A derivada de uma função f, num ponto $x = a$ pertencente a seu domínio, será $f'(a)$, tal que:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Graficamente, $f'(a)$ indica o <u>coeficiente angular da reta tangente</u> ao gráfico da função f <u>no ponto</u> $x = a$.

Derivabilidade e Continuidade

Se uma função f é derivável em um ponto $x = a$, então, podemos dizer que ela é contínua em $x = a$.

Mas, se uma função f é contínua em $x = a$, não necessariamente ela será derivável em $x = a$.

Principais Derivadas

- $[c]' = 0$
- $[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$

Regras de Derivação

Regra da Soma e Subtração: $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Regra do Produto: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Regra do Quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$, desde que $g(x) \neq 0$

Regra da Cadeia

A derivada da função composta fog é tal que:

$$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Em outras palavras: a derivada da função composta é igual à derivada da função **"mais externa"**, calculada na função **"mais interna"**, vezes a derivada da função **"mais interna"**.

Reta Tangente

A equação da reta tangente a uma função f em um ponto $x = a$ é dada por:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Exercícios de Fixação

1. Limites

Lista 1

Calcule o limite ou explique porque não existe.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{2-\sqrt{x^3-4}}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

2. Limite Fundamental Trigonométrico e Teorema do Confronto

Lista 1

Calcule os limites abaixo.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^3(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

3. Limites Infinitos e Limites no Infinito

Lista 1

Calcule os limites abaixo ou mostre que eles não existem.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^3-x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{7x^3+x+4}{x^3+2x^2+5x}$

4. Continuidade

Lista 1

Determine em que pontos a função abaixo é contínua.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x^2-4)+5 \ , & x > 2 \\ 5 \ , & x = 0 \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2} \ , & x < 2 \end{cases}$$

5. Definição de Derivada

Lista 1

Calcule $f'(0)$, sendo f a função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 \ , & x = 0 \end{cases}$$

com $g(0) = g'(0) = 0$.

6. Regras de Derivação

Elaboração própria

a. $f(x) = 3x^2 \cdot \sin(x) - \sqrt[4]{x} + 30$
b. $g(x) = \frac{5x^{10} \cdot \tan x}{\cos x}$
c. $m(x) = \sin\left(\sin\left(\sqrt{x}\tan x\right)\right)$

7. Reta Tangente

P1 Unicamp (Adaptada)

Encontre os pontos do gráfico da função $f(x) = \frac{2x+5}{x+3}$ onde a reta tangente é paralela à reta $y = \frac{x}{4}$. Dê a equação de uma dessas retas.

8. Derivação Implícita

P1 -2016

Seja f uma função derivável definida em um intervalo aberto centrado em $x = 0$ e dada implicitamente pela equação:

$$y^3 + xy^2 + y = 2\sin x + 2$$

O valor de $f'(0)$ é:

a. 5
b. 8

c. $\frac{1}{4}$
d. $\frac{1}{2}$
e. 1

9. Taxas Relacionadas

Lista 1

Um objeto circular tem seu raio variando de maneira desconhecida, mas sabe-se que quando seu raio é $6\ m$, a taxa de variação deste é $4\ m/s$. Determine a taxa de variação da área do objeto no instante em que seu raio mede $6\ m$.

Exercícios de Prova

1. Limites

P1 2017

Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, suponhamos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Então:

a. f é decrescente.
b. $\lim_{x\to\infty} f(x^2) = \infty$
c. $\forall m \geq 0$, temos $f(x) \leq 0$ se $x \geq m$.
d. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
e. Nenhuma das alternativas anteriores é correta.

2. Limites

P1 2017/2016/2015/2014

a) $\lim_{x\to 0} \frac{2x^3\left(\sqrt{x^3+1+x^2}-1\right)}{3x^2\sin(x^3)}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-\sin(x^2)}{2x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)-5x^2}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^6+2} - \sqrt{3x^6+2x^3-5}$

d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x}$

3. Continuidade

P1 2016

Para que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 + 2x - 3|}{x - 1}, & x < 1 \\ x + k \quad , & x \geq 1 \end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$, o valor da constante k deve ser:

a. 7
b. 0
c. -5
d. 1
e. 2

4. Definição de Derivada e Regras de Derivação

P1 2016

Seja $f(x) = \sin\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2}\right) \cdot \sin\left(\sqrt[3]{x}\right)$, determine os pontos em que f não é derivável. Nos demais pontos, calcule $f'(x)$.

5. Derivabilidade

P1 2017

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 5, & x \leq 1 \\ ax + b \quad , & x > 1 \end{cases}$$

Para que f seja derivável em $x = 1$, a e b devem ser, respectivamente:

a. 5 e 3.
b. 2 e 3.
c. 4 e qualquer b real.
d. 4 e 3.
e. f não é derivável em $x = 1$ para nenhum valor de a e b.

6. Reta Tangente

P1 2016

Dentre todas as retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$, a única que passa pelo ponto $(1,0)$:

a. $x = 1 + 2y$
b. $x = 1 - 2y$
c. $2x = 2 + y$
d. $x = 1 + y$
e. $2x = 2 - 3y$

7. Derivação Implícita e Reta Tangente

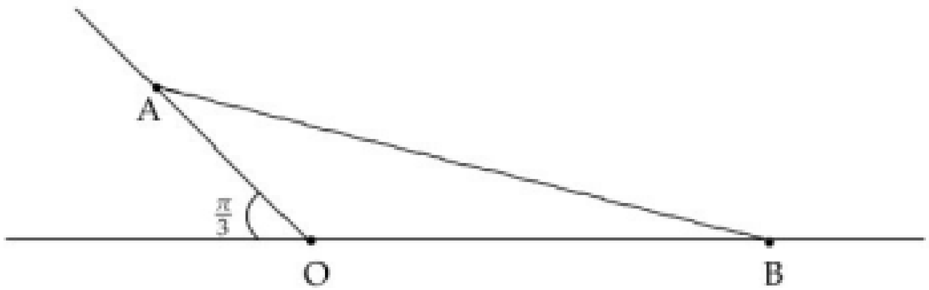
P1 2017

Encontre a reta tangente à curva $x^2y(x + 3y) = x^2 + 3y^2$ no ponto $(1,1)$. Admita que a curva define implicitamente $y = y(x)$ como função diferenciável de x em algum intervalo aberto contendo 1 e de forma que $y(1) = 1$.

8. Taxas Relacionadas

P1 2015

Uma barra, representada na figura pelo segmento AB, tem a extremidade A apoiada em um plano inclinado e a extremidade B no chão, conforme a figura. No instante t_0, a barra desliza de modo que o segmento AO mede $20\ cm$ e diminui a uma taxa de variação de $10\ cm/s$. Sabendo que o segmento OB mede $40\ cm$ no instante t_0, determine a taxa de variação de OB nesse instante.



Gabarito

Exercícios de Fixação

1. a) $-\frac{1}{6}$
b) não existe.

2. a) $\frac{1}{6}$
b) 0

3. a) $-\infty$
b) 7

4. a função é contínua em $\mathbb{R}$.

5. $f'(0) = 0$

6.

a. $f'(x) = 6x \cdot \sin(x) + 3x^2 \cdot \cos(x) - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

b. $g'(x) = \frac{(50x^9 \cdot \tan x + 5x^{10} \cdot \sec^2 x)\cos x + 5x^{10} \cdot \tan x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$

c. $m'(x) = \left(\frac{\tan x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \sec^2 x\right) \cdot \cos\left(\sin\left(\sqrt{x} \cdot \tan x\right)\right) \cdot \cos\left(\sqrt{x} \cdot \tan x\right)$

7. $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ e $\left(-5, \frac{5}{2}\right)$

8. Alternativa C.

9. A área varia a uma taxa de $48\pi\ m^2/s$.

Exercícios de Prova

1. Alternativa E.

2. a) $\frac{1}{3}$
b) $-\frac{4}{3}$
c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
d) $-\infty$

3. Alternativa C.

4. f não é derivável apenas em $x = -1$. $f'(0) = 1$, e para todo x diferente de -1 e 0, $f(x) = \sin\left(\sqrt[3]{x}\right) \cdot \cos\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2}\right) \cdot \frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}} + \sin\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2}\right) \cdot \frac{\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)}{3\sqrt[3]{x^2}}$

5. Alternativa D.

6. Alternativa A.

7. $y = -7x + 8$

8. O segmento OB varia a uma taxa de $8\ cm/s$.