www.estudar.com.vc

Cálculo II

Máximos e Mínimos sobre Conjuntos Compactos

Lista de Exercícios

1. Conjuntos Compactos

Elaboração Própria

Determine se os conjuntos a seguir são compactos:

a. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$

b. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$

c. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \frac{y^2}{4} > 1\}$

d. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

2. Máximos e Mínimos Absolutos

Elaboração Própria

Dada a função $f(x, y) = 2x - 2xy + y^2$ e o conjunto compacto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 4\}$$

a. O conjunto D é compacto? Justifique.

b. Existem pontos de máximo e mínimo de f no conjunto D? Justifique.

c. Se existirem, calcule os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D.

3. Lagrange com Uma Restrição

Elaboração Própria

Considere a função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$:

a. Determine os valores extremos da função no círculo $x^2 + y^2 = 4$.

b. Determine os valores extremos da função no disco $x^2 + y^2 \leq 4$.

4. Máximos e Mínimos Absolutos e Lagrange

P3 2015 – Questão 2 - Adaptada

Deseja-se encontrar os pontos de máximo e mínimo de $f(x,y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$ sobre o conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + 3y \leq 10, x \geq 0, y \geq 0\}$.

a. Os problemas têm solução? Justifique.

b. Em caso afirmativo, determine tais pontos.

c. A função f acima tem ponto de máximo sobre o conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + 3y \leq 10, x > 0, y > 0\}$? E de mínimo? Justifique.

5. Máximos e Mínimos Absolutos e Lagrange

P3 2013 – Questão 3 - Adaptada

Dada a função $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$, seus pontos críticos são $(0,0)$ e $(1,1)$.

a. Existem valores máximo e mínimo no conjunto $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy + x + y = 0, -\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$?

b. Determine os valores de máximo e mínimo no conjunto R, se existirem.

6. Máximos e Mínimos Absolutos e Lagrange

P3 2016 – Questão 1 - Adaptada

Determine os pontos de máximo e mínimo da função dada por $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ sobre o conjunto compacto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

7. Lagrange com Duas Restrições

Elaboração Própria

Determine o valor mínimo da função $f(x,y,z) = 2x + 4y + z$ na curva da intersecção do plano $x + y - z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

8. Lagrange com Duas Restrições

P3 2012 – Questão 4 - Adaptada

Encontre os pontos de máximo e mínimo de $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3z^2$ em:

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 2 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 = 2\}.$$

9. Lagrange com Duas Restrições

P3 2015 – Questão 4 - Adaptada

Determine, caso existam, os pontos de máximo e mínimo da função $f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2$ sobre o conjunto

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\, x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 5 \text{ e } x + z = 2\right\}.$$

10. Problema de Volume e Área

Elaboração Própria

Deseja-se montar uma caixa retangular de papelão para guardar os sapatos volumosos que uma estrela *hollywoodiana* utilizará na cerimônia anual da entrega dos prêmios do Oscar. No entanto, a empresa possui apenas 14 m^2 de papelão, e há urgência para montar a caixa. Determine o maior volume que a caixa pode ter.

11. Problema de Distância

P3 2016 – Questão 3 - Adaptada

Determine os pontos de $\mathbb{R}^3$ mais próximos e os mais distantes da origem sobre os seguintes conjuntos compactos:

a. $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1 \; e \; z = 3 - x^2 - y^2\}$;
b. $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1 \; e \; z \leq 3 - x^2 - y^2\}$.

Gabarito

1.

- **a.** Sim
- **b.** Não
- **c.** Não
- **d.** Sim

2.

- **a.** Sim
- **b.** Sim
- **c.** Mínimo vale $f(3,3) = -3$ e o máximo vale $f(1,4) = 10$.

3.

- **a.** Máximo $f(\pm 2,0) = 8$ e mínimo $f(0,\pm 2) = 4$.
- **b.** Mínimo $f(0,0) = 0$ e máximo $f(0,\pm 2) = 4$.

4.

- **a.** Sim
- **b.** $f(x,0)$ e $f(0,y)$ são pontos de mínimo e $f\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ é ponto de máximo.
- **c.** Não assume ponto de mínimo, $f\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ é ponto de máximo.

5.

- **a.** Sim
- **b.** $f(0,0) = 0$ é mínimo absoluto e $f\left(1,-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2},1\right) = \frac{19}{8}$ são pontos de máximo absoluto.

6. Máximo absoluto em $f\left(-2, \pm\sqrt{12}\right) = 47$ e mínimo absoluto em $f(1,0) = -7$.

7. $f\left(-\frac{6}{\sqrt{34}}, -\frac{10}{\sqrt{34}}, -1 - \frac{16}{\sqrt{34}}\right) = -2\sqrt{34} - 1$

8. $f(1,1,0) = 2$ é ponto de mínimo e $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \frac{82}{27}$ é ponto de máximo.

9. $f\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3}\right) = -\frac{75}{9}$ é ponto de mínimo e $f(2,0,0) = 8$ é ponto de máximo.

10. $\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

11.

- **a.** O ponto de menor distância é $f(1,1,1) = 3$ e o ponto de maior distância é $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right) = 5$.
- **b.** Os pontos são os mesmos do item a.