estudar.com.vc

Cálculo IV

Resumo e Exercícios P3

Resumo da Teoria

1. Equações Diferenciais

Para a P3, deixaremos de lado as séries de Taylor e Fourier. Estudaremos, então, métodos que nos ajudam a resolver equações diferenciais. Mas o que são equações diferenciais?

De uma forma bem resumida, podemos dizer que equações diferenciais são equações que relacionam uma variável (normalmente y), com sua derivada em relação à outra variável (normalmente x). Um possível exemplo poderia ser:

- $y' + y = x$

Neste caso queremos achar a função y, que, substituída na equação nos de uma identidade. Por exemplo, tomando $y = x^2$ na equação acima, temos $y' = 2x$. Substituindo na equação:

- $2x + x^2 = x \rightarrow$ Não é uma identidade, pois $2x + x^2$ não é igual a x, para qualquer x

Chegamos à conclusão, portanto, que $y = x^2$ não é solução da equação diferencial acima.

A partir daqui, espero que tenha ficado claro que, dada uma equação diferencial, sua tarefa será simples: achar um conjunto de funções y que satisfaçam a equação dada. Veremos que, para cada tipo de equação diferencial, há um método a ser aplicado.

Por isso que os matemáticos dividem as equações diferenciais em "subgrupos". Primeiro estudarmos as equações diferenciais de ordem um e, em seguida, as de ordem maior que um.

2. EDO de ordem 1

Uma EDO (Equação Diferencial Ordinária) é de ordem 1, quando o grau máximo das derivadas que aparecem na equação é 1. Alguns exemplos podem ajudar:

- $y' + 3xy = x^2$
- $yy' + xy = \frac{2}{x}$
- $y' + y = 0$

Outra forma de apresentar uma equação de primeira ordem é substituir o termo y' por $\frac{dy}{dx}$, o que é bem intuitivo, né? Fazendo isso para as equações acima, temos:

- $\frac{dy}{dx} + 3xy = x^2 \rightarrow dy + (3xy - x^2)dx = 0$
- $\frac{ydy}{dx} + xy = \frac{2}{x} \rightarrow ydy + \left(xy - \frac{2}{x}\right)dx = 0$
- $\frac{dy}{dx} + y = 0 \rightarrow dy + dxy = 0$

Enfim, são duas formas equivalentes de representar uma equação de ordem 1, e nos exercícios veremos as duas.

No total, existem 5 métodos para resolver uma EDO de ordem 1, e são eles:

Método da Separação das Variáveis:

Neste método, dada uma equação, separamos as variáveis, jogando tudo que tem y para um lado da igualdade, e tudo que tem x para o outro. Por exemplo:

$$y' - 3xy = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} - 3xy = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 3xy \rightarrow \frac{dy}{y} = 3xdx$$

Percebam que, neste caso, é necessário escrever a equação em termos de dy e dx. Do lado esquerdo temos **apenas** y e do lado direito **apenas** x.

Agora integramos ambos os lados:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3xdx \rightarrow \ln|y| = \frac{3x^2}{2} + C \rightarrow y(x) = \pm e^C * e^{\frac{3}{2}x^2}$$

Como e^C é uma constante maior que 0, então $\pm\, e^C$ é também uma constante, diferente de 0. Chamaremos e^C de K, com $K \neq 0$.

$$y(x) = K * e^{\frac{3}{2}x^2}$$

Pronto! Simples, não? Mas como veremos, este método é pouco abrangente. Poucas equações diferenciais de ordem 1 conseguem ter suas variáveis separadas. Se eu fizer uma simples modificação na equação do exemplo anterior, ela deixa de ser de variáveis separáveis.

$$y' - 3xy + 1 = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} - 3xy + 1 = 0 \rightarrow dy = (3xy - 1)dx$$

Caímos em um beco sem saída. Concluímos que, apesar de simples, o método não nos permite resolver a maioria esmagadora das equações de ordem 1.

Método da EDO exata:

Um jeito genérico de representar uma EDO de ordem 1 é o seguinte:

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

Ou, chamando y' de $\frac{dy}{dx}$, temos:

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \rightarrow Pdx + Qdy = 0$ (simplificação)

Dizemos que uma EDO de ordem 1 é exata, se, e somente se, a seguinte relação for válida:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

E porque uma EDO exata é especial? Por que se prova que, existe uma função $f(x,y)$, de tal forma que $f(x,y) = C$ é solução da EDO exata. E quem é essa misteriosa $f(x,y)$? Ela possui a seguinte propriedade:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = P$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$

Usando estas duas relações conseguimos chegar na nossa função $f(x,y)$. Depois disto basta dizer que as soluções da EDO são tais que $f(x,y) = C$, com $C \in R$.

Método do fator integrante:

Vamos supor que um exercício nos forneceu uma EDO e a colocamos ela na seguinte forma:

$$Pdx + Qdy = 0$$

Se ela for exata, usamos o método anterior. Mas se ela não for exata podemos usar o seguinte raciocínio. Será que existem funções em y $\left(u(y)\right)$ e x $\left(u(x)\right)$, que, ao multiplicarem a equação diferencial a tornem exata?

Existem! Darei um nome a estas funções:

$$u(x) \rightarrow Fator\ integrante\ em\ x$$

$$u(y) \rightarrow Fator\ integrante\ em\ y$$

Beleza, e como descubro estes fatores? É uma decoreba, ilustrada a seguir:

- $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ $\rightarrow$ Se esta expressão for apenas função de x então existe um fator integrante em x, e ele é dado por:
- $u(x) = e^{\int g(x)dx}$, onde $g(x) = \dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$

- $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ → Se esta expressão for apenas função de y então existe um fator integrante em y, e ele é dado por:
- $u(x) = e^{-\int h(y)dx}$, onde $h(y) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$

Vamos supor então que eu identifico um fator integrante $u(x)$. Eu sei o seguinte:

$$Pdx + Qdy = 0 \rightarrow não\ é\ exata$$

Mas, multiplicando pelo fator integrante ela se torna exata:

$$Pu(x)dx + Qu(x)dy = 0 \rightarrow Essa\ sim\ é\ exata$$

Agora resolvo a nova equação exata pelo método da EDO exata.

<u>Método da EDO linear:</u>

Uma EDO de ordem 1 é dita linear, quando ela pode ser escrita da seguinte forma:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

A solução desta EDO é dada pela fórmula a seguir:

$$y(x) = e^{\int -p(x)}\left[C + \int e^{\int p(x)} q(x)dx\right]$$

Então se você identificar uma EDO linear, basta coloca-la na forma com o $p(x)$ e $q(x)$ e aplicar a fórmula.

Método da mudança de variáveis:

Isso não bem um método que você aplica, é mais uma sacada que você precisa ter na hora da prova. Então você tenta algum dos 4 métodos anteriores, e se nenhum funcionar, isso sugere uma mudança de variáveis. Para ficar mais claro, tomem o exemplo a seguir:

$$y' = \sin^2(x - y + 1)$$

Obviamente essa equação não é de variáveis separáveis e muito menos linear. E se fizermos as contas, concluímos que não é exata e nem possui fatores integrantes em x e y.

A forma como a equação é dada sugere a seguinte mudança:

$$x - y + 1 = z \to z' = 1 - y' \to y' = 1 - z'$$

Jogando isso na EDO original, temos:

$$1 - z' = \sin^2 z \to z' = 1 - \sin^2 z \to z' = \cos^2 z$$

Antes, eu tinha uma EDO que relacionava y e x . Agora surgiu uma EDO, bem mais simples, que relaciona z com x, e de variáveis separáveis.

$$z' = \cos^2 z \to \frac{dz}{dx} = \cos^2 z \to \sec^2 z\, dz = dx \to \int \sec^2 z\, dz = \int dx$$

O resultado disso é:

$$\tan z = x + K, onde\ K \in R$$

Lembrando da mudança feita $(z = x - y + 1)$.

$\tan(x - y + 1) = x + K, onde\ K \in R$

As soluções da EDO original satisfazem a expressão anterior para qualquer valor de K.

Enfim, a respeito de EDO de ordem 1, é isso. De agora em diante, falaremos das EDOs de ordem maior que 1.

3. EDO de ordem maior que 1

Para simplificar a nossa vida, para essa P3, apenas estudaremos as EDOs lineares de ordem maior que 1. Ou seja, não estudaremos EDOs que tenham termos da forma $\sin y\,, y^2, e^y$ e por aí vai. Trabalharemos com equações que possuem apenas a variável y e suas respectivas derivadas. Alguns exemplos ajudam a visualizar:

- $y''' + 3y' + 2y = e^x \rightarrow Coeficientes\ Constantes$
- $y^{(5)} - y = \sin x \rightarrow Coeficientes\ Constantes$
- $y'' + xy' + x^2y = \tan x \rightarrow Coeficintes\ Variáveis$

Toda EDO linear tem associada a ela uma equação homogênea. Para obter esta equação homogênea basta pegar a equação original e eliminar o único termo constante em y. As equações homogêneas associadas às EDOs anteriores são:

- $y''' + 3y' + 2y = 0 \rightarrow Coeficientes\ Constantes$
- $y^{(5)} - y = 0 \rightarrow Coeficientes\ Constantes$

- $y'' + xy' + x^2y = 0 \rightarrow Coeficintes\ Variáveis$

Agora que vem a sacada essencial. A solução de uma EDO linear é dada pela soma da solução da sua equação homogênea com uma solução particular. Vamos tomar como exemplo, a primeira equação do exemplo anterior:

$y''' + 3y' + 2y = e^x$, cuja equação homogênea é $y''' + 3y' + 2y = 0$.

Vamos supor que a solução desta equação homogênea seja conhecida e valha $y_h(x)$. Vamos supor, também, que conhecemos uma solução particular da EDO, que chamamos de $y_p(x)$.

A solução geral da equação será dada por:

$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Então, daqui para frente, analisaremos as EDOs em dois passos. Vamos descobrir a solução da homogênea associada e depois vamos descobrir uma solução particular. Tendo as duas, somamos e obtemos a solução geral.

Como vocês podem perceber, estas EDOs lineares podem ser de coeficientes constantes ou não. Faremos então essa divisão final. Analisaremos as EDOs de coeficientes constantes e depois vamos para o caso final com coeficientes variáveis, mas sempre descobrindo a solução da homogênea e depois somando com uma solução particular.

4. EDOs de Coeficientes Constantes

São EDOs cujos termos que multiplicam y e suas derivadas são todos constantes. Veremos como obter a solução da homogênea e depois como obter a solução particular.

Solução da Homogênea:

Uma EDO linear de coeficientes constantes pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = q(x)$$

A equação homogênea associada a ela fica simplesmente:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

Agora à essa equação homogênea eu associa uma equação **polinomial** característica:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

Percebam que esta última trabalha com potências de s, e podemos achar suas raízes. Prova-se que:

Se a é raiz da equação característica com multiplicidade k, então o conjunto $\{e^{ax}, xe^{ax}, \dots, x^k e^{ax}\}$ é solução da homogênea.

Se $a \pm bi$ é raiz da equação característica com multiplicidade k, então o conjunto $\{e^{ax} sin(bx), e^{ax} cos(bx), \dots, x^k e^{ax} sin(bx), x^k e^{ax} cos(bx)\}$ é solução da homogênea.

Se $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ são soluções da homogênea, então a solução geral da homogênea $y_h(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$ (combinação linear das soluções).

Vamos supor que tenhamos a seguinte homogênea:

$y'' - 2y' + y = 0$

A equação característica associada é:

$s^2 - 2s + 1 = 0$, cujas raízes são $s = 1$ com multiplicidade 2.

Assim, as soluções da homogênea serão $\{e^x, xe^x\}$

A solução geral da homogênea é combinação linear destas duas, de modo que:

$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$

Outro exemplo, é caso tivéssemos a seguinte equação:

$y''' + 2y'' + 2y' = 0$

A equação característica associada é:

$s^3 + 2s^2 + 2s = 0 \rightarrow s(s^2 + 2s + 2) = 0$

As soluções desta equação são:

$s = 0 \rightarrow$ Multiplicidade 1

$s = 1 \pm i \rightarrow$ Multiplicidade 1, cada uma

Assim, as soluções da homogênea são $\{e^{0x} = 1, e^x \sin x\,, e^x \cos x\}$

A solução geral da homogênea é dada pela combinação linear das 3 anteriores, resultando em:

$$y_h(x) = C_1 + C_2 e^x \sin x + C_3 e^x \cos x$$

Solução Particular (Método dos Coeficientes a Determinar):

Uma EDO linear de coeficientes constantes pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = q(x)$$

É de se esperar que uma solução particular desta equação, preserve as mesmas características de $q(x)$, mesmo após sucessivas derivações.

Por exemplo, se $q(x)$ for uma exponencial, provavelmente uma solução particular desta equação também será uma exponencial, pois se eu substituir y por uma exponencial na equação, após sucessivas derivações ainda terei uma exponencial do lado esquerdo e uma exponencial do lado direito.

Assim, de acordo com a natureza de $q(x)$ eu "chuto" uma função $y_p(x)$, candidata a solução particular. O que mostrarei para vocês a seguir é que, dada uma EDO com uma determinada $q(x)$, qual $y_p(x)$ eu preciso chutar. Dividiremos o problema em 3 casos:

Caso 1 : $\boldsymbol{q(x) = P_m(x)\ (Polinomio\ de\ grau\ m)}$

Prova-se que, quando $q(x) = P_m(x)$ a função $y_p(x)$ que chutarei, será:

$$y_p(x) = x^k P'_m(x)$$

- $P'_m(x) \rightarrow$ Polinômio genérico de grau m
- $k\ \rightarrow$ Multiplicidade da raiz $s = 0$ na equação característica da homogênea

Assim, se $q(x) = x^2 + 3x \rightarrow Polinomio\ de\ grau\ 2\ (m = 2)$, e $s = 0$ é raiz dupla da equação característica $(k = 2)$, então a solução a ser chutada $y_p(x) = x^2 P_2'(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C)$ Jogo esta solução na EDO e por meio de uma comparação determino os coeficientes A, B, C.

Caso 2 : $\boldsymbol{q(x) = e^{ax} P_m(x)\ (Polinomio\ de\ grau\ m * Exponencial)}$

Prova-se que, quando $q(x) = e^{ax} P_m(x)$ a função $y_p(x)$ que chutarei, será:

$$y_p(x) = x^k e^{ax} P'_m(x)$$

- $P'_m(x) \rightarrow$ Polinômio genérico de grau m
- $k\ \rightarrow$ Multiplicidade da raiz $s = a$ na equação característica da homogênea

Assim, se $q(x) = xe^{2x} \rightarrow Polinomio\ de\ grau\ 1 * Exponencial\ (m = 1)$, e $s = 2$ é raiz tripla da equação característica $(k = 3)$, então a solução a ser chutada $y_p(x) = x^3 e^{2x} P'_1(x) = x^3 e^{2x}(Ax) = Ax^4 e^{2x}$. Jogo esta solução na EDO e por meio de uma comparação determino o coeficiente A.

Caso 3 : $\boldsymbol{q(x) = e^{ax}cos(bx)P_m(x)\ ou\ e^{ax}sin(bx)P_m(x)}$

$\boldsymbol{(Polinomio\ de\ grau\ m * Exponencial * função\ cossenoidal/senoidal)}$

Prova-se que, quando $q(x) = e^{ax}sin/\cos{(bx)}P_m(x)$ a função $y_p(x)$ que chutarei, será:

$$y_p(x) = x^k e^{ax}\cos(bx)\,P'_m(x) + x^k e^{ax}\sin(bx)\,P''_m(x) +$$

- $P'_m(x)$ → Polinômio genérico de grau m
- $P''_m(x)$ → Polinômio genérico de grau m
- k → Multiplicidade da raiz $s = a \pm bi$ na equação característica da homogênea

Assim, se $q(x) = x^2e^{2x}\sin(4x) \rightarrow Polinomio\ de\ grau\ 2 * Exponencial * seno\ (m = 2)$, e $s = 2 \pm 4i$ é raiz única da equação característica $(k = 1)$, então a solução a ser chutada $y_p(x) = xe^{2x}(Ax^2 + Bx + C)\cos(4x) + xe^{2x}(Dx^2 + Ex + F)\sin(4x)$. Jogo esta solução na EDO e por meio de uma comparação determino os coeficientes A, B, C, D, E, F.

Percebam que, mesmo com $q(x)$ sendo **senoidal** (possui termo $\sin 4x$), **ambas as funções, seno e cosseno,** aparecem na solução particular. O mesmo vale no caso de $q(x)$ ser cossenoidal.

<u>Solução Particular (Método da variação dos Parâmetros):</u>

Agora, surge a seguinte pergunta: e quando nossa $q(x)$ não tiver natureza polinomial, exponencial ou cossenoidal. Por exemplo, se eu tomar a seguinte equação:

$y''' - 2y'' + y' = \ln x$

Ela é de coeficientes constantes, e a solução da homogênea se dá através da solução da característica. Mas quando eu for calcular o $y_p(x)$, não posso aplicar o método anterior, pois $q(x)$ não se encaixa em nenhum dos 3 casos.

Assim, aplicamos o **Método da Variação dos Parâmetros**. Para explicá-lo, tomemos a equação anterior. Vamos supor que saibamos de antemão as soluções da homogênea, y_1, y_2, y_3. Podemos facilmente calculá-las através da equação característica, que possui raízes $s = 0$ e $s = 1$ (dupla).

Assim, tiramos $y_1 = 1, y_2 = e^x, y_3 = xe^x$. Mas, visando ser o mais genérico possível, vou deixa-las na forma y_1, y_2, y_3.

“Chutamos” um $y_p(x) = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + u_3(x)y_3$

Calculamos $u_1, u_2\ e\ u_3$, a partir do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q(x) = \ln x \end{bmatrix}$$

Obtenho u_1', u_2', u_3', e integro cada um deles para obter u_1, u_2 e u_3. Tendo os três u_1, u_2, u_3 e as soluções da homogênea y_1, y_2, y_3, a minha solução particular será:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + u_3(x)y_3$$

Obviamente, apresentei aqui o caso de uma EDO de ordem 3. Isso nos levou a 3 soluções da homogênea, a 3 parâmetros u, e a um sistema 3 por 3. Mas o método vale para uma EDO linear de qualquer ordem, o que muda é o tamanho do sistema e com quantas soluções y e parâmetros u eu vou trabalhar.

5. EDOs de Coeficientes Quaisquer

Vimos que uma EDO de coeficientes constantes pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = q(x)$$

Uma EDO de coeficientes variáveis tem mais ou menos a mesma cara. O que muda, são os coeficientes que multiplicam y e suas derivadas. Antes constantes, agora eles podem depender de x. Então a forma genérica de se escrever uma EDO de coeficientes variáveis é:

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x) y = q(x)$$

$$\{a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)\} \rightarrow Dependem\ de\ x$$

Mas como dito anteriormente, mesmo com coeficientes variáveis, ela continua sendo linear. Assim, a solução geral pode ser calculada como uma soma, da solução da homogênea com uma solução particular.

O que muda então? Apenas o método que usaremos para achar a solução da homogênea e a solução particular.

Solução da Homogênea:

Em se tratando de coeficientes variáveis, as EDOs que podem cair na prova serão de ordem 2 no máximo. EDOs de ordem maior que 2, com coeficientes variáveis, são muito difíceis de serem resolvidas.

Então, o que de fato vai cair na prova, será algo do tipo:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x)$$

A equação homogênea associada será:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Percebam que, como os coeficientes não são mais constantes, não faz sentido falar em uma equação característica. Precisamos arranjar um novo método para resolver a homogênea. O mais usado é o seguinte:

Vamos supor que eu tenha em mãos uma solução da homogênea, $y_1(x)$. Defino uma nova solução $y_2(x) = v_1(x)y_1(x)$. Jogo essa nova solução $y_2(x)$ na equação, e consigo achar meu parâmetro $v_1(x)$. Assim, eu tenho duas soluções da homogênea, $y_1(x)$ e $y_2(x) = v_1(x)y_1(x)$.

Como estamos lidando com equações lineares, a solução da homogênea ainda é a combinação linear de suas soluções particulares. Ou seja, ainda é valido:

Se $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ são soluções da homogênea, então a solução geral da homogênea $y_h(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ (combinação linear das soluções).

Concluímos que a solução geral da homogênea será:

$$y_h(x) = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1y_1(x) + C_2v_1(x)y_1(x)$$

Em resumo, basta achar o parâmetro $v_1(x)$ que eu resolvo tudo. Mas lembrem que eu parti do pressuposto que já tenho em mãos uma solução $y_1(x)$ da homogênea. Na prática, o exercício dará essa solução para vocês ou se ele não der, vocês acham por simples inspeção.

Como um exemplo, trouxe para vocês a seguinte equação:

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = \ln x \rightarrow (1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0\ (homogênea)$$

Para essa equação, sendo ela de coeficientes variáveis, a solução da homogênea se passa pelo conhecimento prévio de uma solução $y_1(x)$. Como eu não falei nada, então teremos que achar essa solução por inspeção. Normalmente, essa solução $y_1(x)$ é bem simples, sendo razoável supor que $y_1(x) = x$ seja solução. Testamos então:

$y_1 = x \rightarrow y_1' = 1 \rightarrow y_1'' = 0 \rightarrow$ Jogamos na equação

$$(1 - x^2) * 0 + 2x - 2x = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Confirmamos que $y_1(x) = x$ é solução da homogênea.

Agora, supomos uma nova solução, $y_2(x) = v_1(x)y_1 = v_1(x)x$, e jogamos esta nova solução na equação.

Calculando as derivadas desta nova solução:

$$y_2 = v_1 x$$

$$y_2' = v_1' x + v_1$$

$$y_2'' = v_1'' x + 2v_1'$$

Temos nossa equação:

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$$

E substituímos a nova solução y_2 na equação, obtendo, após simplificações:

$$(1 - x^2)xv_1'' + 2v_1' = 0$$

Agora, podemos chamar $v_1'(x) = m(x)$, de modo que nossa nova equação será:

$$(1 - x^2)xm' + 2m = 0$$

Caímos em uma EDO de ordem 1, na variável m. Quando usamos este raciocínio, sempre cairemos numa EDO de variáveis separáveis, como vocês podem ver a seguir. Lembrando que $m' = \frac{dm}{dx}$:

$$(1 - x^2)x\frac{dm}{dx} + 2m = 0 \rightarrow (1 - x^2)xdm = -2mdx \rightarrow \frac{1}{2m}dm = \frac{1}{x(x^2 - 1)}dx$$

Separadas as variáveis, integramos ambos os lados:

$$\frac{1}{2}\ln|m| = \int \frac{1}{x(x^2-1)}dx$$

A integral da direita pode ser resolvia por frações parciais. Para isso, decompomos a expressão $\frac{1}{x(x^2-1)}$ em frações:

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{(x+1)(x-1)x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x}$$

Juntando as partes, temos que:

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x} = \frac{A(x-1)x + B(x+1)x + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)x}$$

Então:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)x} = \frac{A(x-1)x + B(x+1)x + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)x}$$

Finalmente, chegamos em:

$A(x-1)x + B(x+1)x + C(x-1)(x+1) = 1$, para todo x

Jogando valores de x, de modo a descobria as constantes A, B, C:

- $x = 1 \ \rightarrow B = \frac{1}{2}$
- $x = -1 \ \rightarrow A = \frac{1}{2}$
- $x = 0 \ \rightarrow C = -1$

Concluímos que:

$$\frac{1}{(x^2-1)x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}\right)$$

Assim, a integral pode ser calculada por:

$$\frac{1}{2}\ln|m| = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}\right) dx$$

Agora achamos quem é m:

$$\ln|m| = \ln|x-1| + \ln|x+1| - 2\ln|x| + C$$

$$\ln|m| = \ln\frac{|x^2-1|}{x^2} + C\,,\ \ C \in R$$

$$|m| = \frac{e^C|x^2-1|}{x^2}$$

$$e^C = k,\ \text{com } k > 0$$

$$|m| = \frac{k|x^2-1|}{x^2}$$

$$m = \ \pm k\frac{x^2-1}{x^2} \rightarrow \ \pm k = A,\ \text{com } A\ \in R \neq 0$$

$$m = A\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Lembrando que $v_1' = m \rightarrow\ v_1 = \int m =\ \int A\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx$

$$v_1 =\ Ax + \frac{A}{x}$$

Precisamos de apenas um $v(x)$, assim tomamos $A = 1$

$$v_1 =\ x + \frac{1}{x}$$

Finalmente terminamos. Temos duas soluções da homogênea, $y_1(x) = x\ (inspeção)$ e $y_2(x) = v_1 y_1 = \left(x + \frac{1}{x}\right)x = x^2 + 1$. A solução geral da homogênea será combinação linear destas duas de modo que:

$$y_h(x) = C_1 x + C_2(x^2 + 1)$$

Como vocês podem ter percebido, achar a solução da homogênea neste caso é bem complicado mesmo. São muitos passos a serem feitos, e um erro, por menor que seja, pode ser fatal. De longe, a resolução de EDOs com coeficientes variáveis será a questão mais difícil da prova.

Feito isso, partimos para a solução particular.

Solução Particular:

Esta última parte é bem simples. Tendo as soluções da homogênea, basta aplicar o Método da Variação dos Parâmetros. Mas uma observação importantíssima precisa ser feita. Antes de aplicarmos o método, precisamos "normalizar" nossa equação. O que é normalizar? Transformar o coeficiente dominante em 1. Vejam a seguir, tomando o exemplo anterior:

$$(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = \ln x$$

O coeficiente dominante, aquele que multiplica a derivada de maior ordem, não vale $(1-x^2) \neq 1$. Assim, dividimos a equação por $(1-x^2)$.

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{(1-x^2)}y = \frac{\ln x}{(1-x^2)}$$

Agora sim, aplicamos o Método da Variação dos Parâmetros. Como dito anteriormente o método se passa pela suposição de uma solução particular da forma:

$$y_p(x) = u_1y_1 + u_2y_2$$

Os parâmetros u_1 e u_2 são soluções do sistema mostrado anteriormente. Apenas para esclarecer, vou montar o sistema aqui. A nossa equação aqui é:

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{(1-x^2)}y = \frac{\ln x}{(1-x^2)} \rightarrow q(x) = \frac{\ln x}{(1-x^2)}$$

As soluções da homogênea são $y_1 = x$ e $y_2 = 1 + x^2$ são

A solução particular será: $y_p(x) = u_1x + u_2(1+x^2)$

O sistema que relaciona y_1, y_2, u_1, u_2 e $q(x)$ é, nesse caso, um sistema 2 x 2:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix}$$

Substituindo com nossos valores:

$$\begin{bmatrix} x & 1+x^2 \\ 1 & 2x \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\ln x}{(1-x^2)} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, encontramos u_1' e u_2'. Integramos e achamos u_1 e u_2. Pronto, temos nossa solução particular, da forma:

$$y_p(x) = u_1 x + u_2(1+x^2)$$

A solução geral da equação será a soma da solução da homogênea, com a solução particular:

$$y_g(x) = C_1 x + C_2(x^2+1) + u_1 x + u_2(1+x^2)$$

A seguir, temos um esquema que pode servir como base na parte EDOs de ordem maior que 1.

- EDO lineares de ordem maior que 1
    - EDO de coeficientes constantes
        - Solução da homogênea → Equação característica
        - Solução da Particular
            - $q(x)$ polinômio, exponencial ou seno/cosseno → Método dos Coeficientes a Determinar
            - $q(x)$ não se encaixa nos 3 casos → Método da variação dos Parâmetros
    - EDO de coeficientes variáveis

- Solução da homogênea → Acho y_1 e suponho $y_2 = v_1 y_1$
- Solução da Particular → Método da Variação dos Parâmetros

De teoria é isso. A seguir, temos alguns exercícios para pôr em prática o que foi visto até aqui. Alguns deles serão resolvidos no próprio aulão do fuja.

Exercícios

1. Resolva as seguintes EDOs de ordem 1:

a. $y' = e^{x-2y}$
b. $x^2 y^2 \frac{dy}{dx} = 1 + x^2$
c. $(xe^y + y - x^2)y' = (2xy - e^y - x)$
d. $y' = x^3 - 2xy$
e. $\sin y\,(x + \sin y)dx + 2x^2 \cos y\, dy = 0$

2. Resolva as seguintes EDOs de ordem maior que 1:

a. $y'' - 9y' + 20y = 0$
b. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
c. $y'' - 2y' + 4y = 0$
d. $y'' - 2y' = 12x - 10$
e. $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$
f. $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$
g. $y'' + y = 2\cos x$
h. $y''' + y' = \tan x$
i. $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$

Gabarito:

1.

a. $y(x) = \frac{1}{2}\ln(2e^x + C)$

b. $y(x) = \sqrt[3]{\frac{3x^2-3-Cx}{x}}$

c. $x^2 + y^2 + 2xe^y - 2x^2y = C$

d. $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + Ce^{-x^2}$

2.

a. $y(x) = C_1e^{5x} + C_2e^{4x}$

b. $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$

c. $y(x) = C_1e^x\sin(\sqrt{3}x) + C_2e^x\cos(\sqrt{3}x)$

d. $y(x) = -3x^2 + 2x + C_1 + C_2e^{2x}$

e. $y(x) = e^{-5x}(7x^2 + C_1x + C_2)$

f. $y(x) = -e^{-x}(8x^2 + 4x) + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$

g. $y(x) = x\sin x + C_1\sin x + C_2\cos x$

h. $y_c(x) = C_1 + C_2\sin x + C_3\cos x + \ln|\sec x| - \sin x\ln|\sec x + \tan x|$

i. $y(x) = C_1x + C_2(x^2 + 1) + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}$

Exercícios de Provas Antigas:

P1 - 2015

1. Equações Diferencias Ordinárias de ordem 1

a. Dê a solução geral da equação

$$y''' - 4y' = xe^{2x}$$

E também a solução que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = y'(0) = 1, y''(0) = 0$$

b. Determine k sabendo que $\mu(x,y) = \frac{y^k}{x}$ é fator integrante da equação:

$$ydx + (xy^2 - x\ln x)dy = 0$$

e, em seguida, resolva a equação para $y(1) = 2$

2. Equações Diferencias Ordinárias de ordem maior que 1 - Coeficientes Quaisquer

Determine a solução geral da equação diferencial

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = \frac{(x^2+1)^2}{x+1}$$

($y = x$ é solução da equação homogênea associada)

3. Equações Diferencias Ordinárias de ordem maior que 1 – Coeficientes Constantes

a. Existem constantes reais a_3, a_2, a_1, a_0, tais que a equação diferencial

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

tem o conjunto

$$\{e^x, e^{2x}, \sin(x)\}$$

como base de seu espaço de soluções? Justifique.

b. Encontre (e justifique como o fez) constantes reais a_3, a_2, a_1, a_0, e uma a função real $q(x)$, tais que a equação diferencial

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 = q(x)$$

tem como solução geral

$$y(x) = C_1 e^{-x} + e^x[C_2 \sin(2x) + C_3 \cos(2x)] + x^3 - x + 1$$

onde C_1, C_2, C_3 são reais

Gabarito:

1.

a. $y(x) = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x} + \frac{1}{32}(2x^2 - 3x)e^{2x}$

$$C_1 = \frac{1}{16}; C_2 = \frac{39}{128}; C_3 = -\frac{31}{128}$$

b. $k = -2$

$$\frac{\ln x}{y} + y = 2$$

2. $y_g(x) = C_1x + C_2(x^2 - 1) + \left(x - \frac{x^2}{2}\right)x + (x - \ln(x+1))(x^2 - 1)$

3.

a. **Não existem**

b. $a_3 = 1, a_2 = -1, a_1 = 3, a_0 = 5$

P1 – 2016

1. Equações Diferencias Ordinárias de ordem 1

Resolva as equações

a. $xy' = y + \sqrt{x^2 + 4y^2}$
b. $y' - 2xy = x$

2. Equações Diferencias Ordinárias de ordem maior que 1 - Coeficientes Quaisquer

Dê a solução geral de:

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$$

($y = e^x$ é solução da equação homogênea associada)

3. Equações Diferencias Ordinárias de ordem maior que 1 – Coeficientes Constantes

Dê a solução geral de

$$y''' + 4y' = 3\cos(2x)$$

E a solução que satisfaz a condição inicial $y(0) = 4, y'(0) = y''(0) = 0$

Gabarito:

1.

a. $\sqrt{x^2 + 4y^2} + 2y = Cx^3$, **onde** $C \neq 0$

b. $y = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}$, **onde** $C \in R$

2. $y_g(x) = C_1e^x + C_2x - (x + 1) - x^2$

3. $y_g(x) = C_1 + C_2 \cos(2x) + C_3 \sin(2x) - \frac{3x\cos(2x)}{8}$

$C_1 = 4\,; C_2 = 0; C_3 = \frac{3}{16}$