www.estudar.com.vc

Cálculo II

Resumo e Exercícios P3

Resuminho Teórico e Fórmulas Parte 1

Funções de Três Variáveis

$$w = f(x, y, z)$$

Definida em $\mathbb{R}^3$, apenas um valor de w para cada (x, y, z).

Domínio de Função de Três Variáveis:

Valores que podem ser colocados nas variáveis controladas, exceto as restrições.

Domínio máximo: $\mathbb{R}^3$

Superfície de Nível:

A superfície de nível k é tal que:

$$f(x, y, z) = k$$

Para cada k diferente, há uma equação de três variáveis diferente → Gráfico em 3D diferente.

Vetor Gradiente:

O gradiente de f (lê-se grad f ou del f) é:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x, y, z) = \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\right)$$

Posição Relativa entre Gradiente e Reta Tangente:

O gradiente é um vetor ortogonal a qualquer vetor ou reta tangente ao gráfico em questão, no ponto (x_0, y_0, z_0) em que ocorre a tangência e onde está definido o gradiente. Assim:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \perp \overrightarrow{\gamma'}(t_0)$$

Portanto, o produto escalar entre o gradiente e o vetor tangente é nulo:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{\gamma'}(t_0) = 0$$

Equação da Derivada Direcional utilizando Gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0, z_0) = \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = < a, b, c >$$

Equação do Plano Tangente:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} * (y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} * (z - z_0) = 0$$

Onde (x_0, y_0, z_0) é o ponto onde o plano tangencia a função $z = f(x, y)$.

Reta Tangente por Interseção de Superfícies:

Como a reta tangente é perpendicular ao gradiente, a reta tangente à curva dada pela interseção de duas superfícies será perpendicular tanto ao gradiente da função que origina a primeira superfície, quanto ao gradiente da função que origina a segunda superfície.

A reta tangente é:

$$r: P + \lambda \vec{v}$$

Onde $\vec{v}$ é um múltiplo do vetor tangente à curva.

A relação entre $\vec{v}$ e os gradientes é:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \perp \vec{v} \text{ e } \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0, z_0) \perp \vec{v}$$

Portanto, podemos obter $\vec{v}$ pelo produto vetorial entre os gradientes:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \times \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0, z_0)$$

Pontos Críticos, Máximos e Mínimos

Pontos Críticos:

São os pontos nos quais os valores das derivadas parciais são iguais a zero. Por meio deles, é possível estudar a mudança de direção da função, e, consequentemente, máximos e mínimos. Se o ponto crítico é um (x_0, y_0, z_0):

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, f_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ e } f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Ou seja, deve-se derivar a função e igualar a 0 para descobrir os pontos críticos.

Valores Extremos:

Valores extremos são os pontos de máximo e mínimo do gráfico, no gráfico como um todo ou em uma região específica.

Máximos Absolutos:

São os pontos (x_0, y_0, z_0) cujo valor de $f(x_0, y_0, z_0)$ é o maior possível, em toda a extensão do gráfico da função f:

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo:

$$f(x_0, y_0, z_0) > f(x, y, z), \text{ para } (x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$$

Mínimos Absolutos:

São os pontos (x_0, y_0, z_0) cujo valor de $f(x_0, y_0, z_0)$ é o menor possível, em toda a extensão do gráfico da função f:

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de mínimo:

$$f(x_0, y_0, z_0) < f(x, y, z), \text{ para } (x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$$

Máximos Locais:

São os pontos (x_0, y_0, z_0) cujo valor de $f(x_0, y_0, z_0)$ é o maior possível, dentro de uma região limitada que contenha o ponto; todavia, em toda a extensão do gráfico da função f, há pontos cujo valor de $f(x, y, z)$ são maiores que $f(x_0, y_0, z_0)$.

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo local:

$$f(x_0, y_0, z_0) > f(x, y, z), \text{ dentro de uma região limitada do gráfico}$$

$$\text{Mas } f(x, y, z) > f(x_0, y_0, z_0), \text{ para algum } (x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$$

Mínimos Locais:

São os pontos (x_0, y_0, z_0) cujo valor de $f(x_0, y_0, z_0)$ é o menor possível, dentro de uma região limitada que contenha o ponto; todavia, em toda a extensão do gráfico da função f, há pontos cujo valor de $f(x, y, z)$ são menores que $f(x_0, y_0, z_0)$.

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de mínimo local:

$f(x_0, y_0, z_0) < f(x, y, z)$, dentro de uma região limitada do gráfico

Mas $f(x, y, z) < f(x_0, y_0, z_0)$, para algum $(x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$

Ponto de Sela:

O ponto de sela é um ponto crítico cujo valor da função, calculada nele, não é máximo nem mínimo; ou seja, é um ponto crítico que não gera valor extremo.

Hessiano de uma Função de Duas Variáveis:

O Hessiano (ou função Hessiana) pode ser calculado pelo seguinte determinante:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$H(x, y) = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy} * f_{yx}$$

Teste da Segunda Derivada:

Para descobrir se um ponto crítico (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo local, mínimo local ou ponto de sela, aplicamos o teste da segunda derivada:

1. Calcula-se o Hessiano da função no ponto crítico, ou seja:

$$H(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) * f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0) * f_{yx}(x_0, y_0)$$

2. Observar o sinal do Hessiano:
    a. Se $H(x_0, y_0) < 0$, o ponto crítico é ponto de sela
    b. Se $H(x_0, y_0) = 0$, o Hessiano é inconclusivo e é necessário analisar os valores da função nas redondezas, para descobrir se existem valores maiores ou menores;
    c. Se $H(x_0, y_0) > 0$, o ponto crítico gera um valor extremo e deve-se proceder para o passo 3.

3. Analisar o valor da segunda derivada f_{xx}, caso $H(x_0, y_0) > 0$:
    a. Se $f_{xx} > 0$, o ponto é mínimo local;
    b. Se $f_{xx} < 0$, o ponto é máximo local.

Exercícios Parte 1

1. Plano Tangente à Superfície de Nível

P3 2016 – Questão 1 - Adaptada

Determine todos os pontos da superfície de nível 1 da função $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ em que seu plano tangente é paralelo ao plano $2x + y - 3z = 2$.

2. Superfície de Nível

P3 2014 – Questão 3 - Adaptada

Seja a superfície S dada pela equação $x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 10 = 0$.

a. Existe apenas um ponto A na superfície S tal que a reta normal a S e a A contém os pontos $(3{,}0{,}4)$ e $(1,-2{,}0)$. Determine o ponto A.

b. Sejam $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ diferenciáveis com $\nabla f(-2-1) = (b, 1)$. Suponha que a imagem de γ é a intersecção do gráfico de f com a superfície S, dada no item (a), e que o ponto $P = (-2,-1,-2)$ pertence à imagem de γ. Determine b de modo que os planos tangentes ao gráfico de f e à S sejam ortogonais no ponto P.

c. Dê uma equação da reta tangente à Im_γ no ponto P.

3. Interseção de Superfícies

P3 2013 – Questão 1 - Adaptada

Seja S a superfície de equação $2xy - 2y^2 + z^2 + 6z = 1$.

a. Encontre o plano tangente a S no ponto $(-4,-1,-1)$.

b. Considere a curva $C: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + 4y^2 = 1, 2x + 4y = z^2 \; e \; z < 0\}$. Determine os pontos de C nos quais a reta tangente é paralela ao plano encontrado no item (a).

c. Encontre uma parametrização para a intersecção da superfície S com o plano $x = 3y$.

4. Máximos e Mínimos Locais

P3 2015 – Questão 3 - Adaptada

Seja a função $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

d. Determine quais são os pontos críticos de f;

e. Classifique os pontos críticos, justificando, quanto a máximo local, mínimo local ou sela

5. Máximos e Mínimos Locais

P3 2016 – Questão 2 - Adaptada

Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = kx^3 + x^2 + 2y^2 - 4x - 4y$, onde k é um número real não nulo.

a. Para que valores de k a função f possui exatamente dois pontos críticos?

b. Classifique os dois pontos críticos de f obtidos no item anterior.

Gabarito Parte 1

1) $\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ e $\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

2)

a. $(2, -1, 2)$
b. $b = 3$
c. $(-2, -1, -2) + \mu(-1, 7, 4)$

3)

a. $x + 2y - 2z + 4 = 0$
b. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{2}}\right)$
c. $\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\cos t\,, \frac{\sqrt{10}}{2}\cos t\,, \sqrt{10}\sin t - 3\right)$

4)

a. $(0,0)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$
b. $(0,0)$ é ponto de sela e $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ são mínimos locais.

5)

a. $k > -\frac{1}{12}, k \neq 0$
b. $\left(\frac{-1-\sqrt{1+12k}}{3k}, 0\right)$ é ponto de sela e $\left(\frac{-1+\sqrt{1+12k}}{3k}, 0\right)$ é mínimo local.

Resuminho Teórico e Fórmulas Parte 2

Máximos e Mínimos em Conjuntos Compactos

<u>Conjuntos Compactos:</u>

Um conjunto é compacto quando ele é, simultaneamente:

1. Limitado → não vai até o infinito, e consigo criar uma circunferência (para conjuntos 2D) ou uma bola (para conjuntos 3D) de forma que o conjunto esteja inteiramente dentro da circunferência/bola;

2. Fechado → a fronteira do conjunto, ou seja, a borda, faz parte do conjunto. Um conjunto aberto contém apenas o interior; um conjunto fechado contém interior e fronteira.

Em geral:

Um conjunto $g(x, y, z) < k$ é composto pelo interior

Um conjunto $g(x, y, z) = k$ é composto pela fronteira

Um conjunto $g(x, y, z) \leq k$ é composto por fronteira e interior

<u>Teorema de Weierstrass</u>

"*Se tenho uma função contínua e um conjunto compacto, a função com certeza possui pontos de mínimo absoluto e pontos de máximo absoluto sobre o conjunto compacto*".

Ou seja, para garantir que existem pontos de mínimo e máximo de uma $f(x, y, z)$ sobre um conjunto C:

1. A função f deve ser contínua em todos os pontos;

2. E o conjunto C deve ser compacto, ou seja, limitado e fechado.

Se as condições acima não são verificadas, nada pode se dizer sobre a existência de valores extremos em C.

Passos para Identificar Máximos e Mínimos sobre Conjuntos Compactos

Caso o conjunto compacto C inclua tanto a fronteira quanto seu interior, devemos:

1. Interior: Determinar o valor de $f(a, b)$, onde (a, b) é ponto crítico de f que está dentro do conjunto C. Registrar os valores calculados;

2. Fronteira: Determinar os valores extremos de f na fronteira de C, registrando o maior e o menor valor e o ponto correspondente;

3. Elencar os valores calculados na etapa 1 e 2, de forma que o maior é o máximo absoluto e o menor é o mínimo absoluto.

Caso o conjunto compacto C inclua somente a fronteira, devemos:

1. Fronteira: Determinar os valores extremos de f na fronteira de C, registrando o maior e o menor valor e o ponto correspondente;

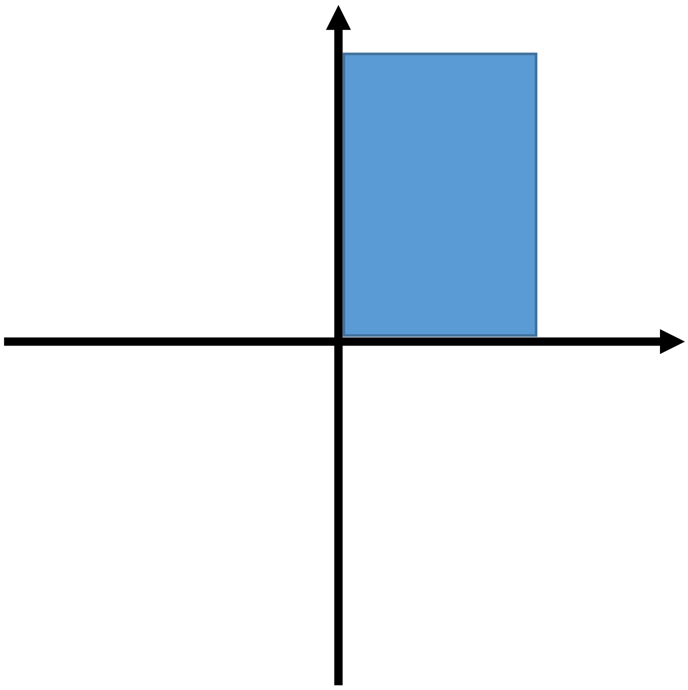
2. Elencar os valores calculados na etapa 1 e 2, de forma que o maior é o máximo absoluto e o menor é o mínimo absoluto.

Fronteira Parametrizável:

Em alguns casos, a fronteira do conjunto C em questão pode ser parametrizada, para que seja possível achar os maiores e menores valores de f na região.

Exemplo:

$$C: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2 \; e \; 0 \leq y \leq 3\}$$



a. Região inferior: $0 \leq x \leq 2 \; e \; y = 0$
b. Região superior: $0 \leq x \leq 2 \; e \; y = 3$
c. Região esquerda: $x = 0 \; e \; 0 \leq y \leq 3$
d. Região direita: $x = 2 \; e \; 0 \leq y \leq 3$

Multiplicador de Lagrange:

O multiplicador de Lagrange é um número real que indica que, em pontos de valor extremo sobre conjuntos compactos, o gradiente da função pode ser obtido através de múltiplos dos gradientes das funções que geram as restrições.

Neste caso, os vetores gradientes são L.D. (Linearmente Dependentes).

<u>Método dos Multiplicadores de Lagrange para Uma Restrição:</u>

Para estudar os candidatos a mínimos ou máximos na fronteira de um conjunto, podemos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange.

Se o conjunto C possui apenas uma restrição, os candidatos (x_0, y_0) a ponto máximo e mínimo de $f(x, y)$ na fronteira do conjunto são:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0) = \lambda * \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = k \end{cases}$$

Ou:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0 \\ g(x_0, y_0) = k \end{cases}$$

Se o conjunto C possui apenas uma restrição, os candidatos (x_0, y_0, z_0) a ponto máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ na fronteira do conjunto são:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) = \lambda * \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0, z_0) \\ g(x_0, y_0, z_0) = k \end{cases}$$

Ou:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_x(x_0, y_0, z_0) & f_y(x_0, y_0, z_0) & f_z(x_0, y_0, z_0) \\ g_x(x_0, y_0, z_0) & g_y(x_0, y_0, z_0) & g_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} = 0 \\ g(x_0, y_0, z_0) = k \end{cases}$$

Método dos Multiplicadores de Lagrange para Duas Restrições:

Se o conjunto C possui duas restrições, os candidatos (x_0, y_0, z_0) a ponto máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ na fronteira do conjunto são:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) = \lambda * \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0, z_0) + \mu * \overrightarrow{\nabla h}(x_0, y_0, z_0) \\ g(x_0, y_0, z_0) = k \\ h(x_0, y_0, z_0) = k \end{cases}$$

Ou:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0, z_0) & f_y(x_0, y_0, z_0) & f_z(x_0, y_0, z_0) \\ g_x(x_0, y_0, z_0) & g_y(x_0, y_0, z_0) & g_z(x_0, y_0, z_0) \\ h_x(x_0, y_0, z_0) & h_y(x_0, y_0, z_0) & h_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} = 0 \\ g(x_0, y_0, z_0) = k \\ h(x_0, y_0, z_0) = k \end{cases}$$

Aplicações Comuns:

1. Problema de volume: maximizar o volume de um corpo com restrição de área.

Exemplo: Maximizar volume de caixa retangular, com área máxima de 10 m²

$$f(x, y, z) = V = xyz$$

$$C: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2xy + 2xz + 2yz\}$$

2. Problema de distância: encontrar os pontos mais e menos distantes de outro ponto, pertencendo a um conjunto.

Exemplo: Encontrar os pontos mais e menos distantes do ponto (x_P, y_P, z_P) no conjunto $C: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y - z = 1 \ e \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Maximizar e minimizar $f(x, y, z) = (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2$

Onde (x_0, y_0, z_0) é o ponto onde o plano tangencia a função $z = f(x, y)$.

É essencial conhecer o gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, ou seja, as derivadas parciais da função $f(x, y)$, para que a equação do plano seja obtida.

Exercícios Parte 2

1. Máximos e Mínimos Absolutos e Lagrange

P3 2015 – Questão 2 - Adaptada

Deseja-se encontrar os pontos de máximo e mínimo de $f(x, y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}$ sobre o conjunto $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + 3y \leq 10, x \geq 0, y \geq 0\}$.

a. Os problemas têm solução? Justifique.

b. Em caso afirmativo, determine tais pontos.

c. A função f acima tem ponto de máximo sobre o conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + 3y \leq 10, x > 0, y > 0\}$? E de mínimo? Justifique.

2. Máximos e Mínimos Absolutos e Lagrange

P3 2016 – Questão 1 - Adaptada

Determine os pontos de máximo e mínimo da função dada por $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ sobre o conjunto compacto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

3. Lagrange com Duas Restrições

P3 2015 – Questão 4 - Adaptada

Determine, caso existam, os pontos de máximo e mínimo da função $f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2$ sobre o conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 5 \text{ e } x + z = 2\}.$$

4. Problema de Distância

P3 2016 – Questão 3 - Adaptada

Determine os pontos de $\mathbb{R}^3$ mais próximos e os mais distantes da origem sobre os seguintes conjuntos compactos:

a. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1 \ e \ z = 3 - x^2 - y^2\}$;

b. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1 \ e \ z \leq 3 - x^2 - y^2\}$.

Gabarito Parte 2

1)

a. Sim

b. $f(x,0)$ e $f(0,y)$ são pontos de mínimo e $f\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ é ponto de máximo.

c. Não assume ponto de mínimo, $f\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ é ponto de máximo.

2) Máximo absoluto em $f\left(-2,\pm\sqrt{12}\right) = 47$ e mínimo absoluto em $f(1,0) = -7$.

3) $f\left(-\frac{1}{3},\pm\frac{2\sqrt{7}}{3},\frac{7}{3}\right) = -\frac{75}{9}$ é ponto de mínimo e $f(2,0,0) = 8$ é ponto de máximo.

4)

a. O ponto de menor distância é $f(1,1,1) = 3$ e o ponto de maior distância é $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},2\right) = 5$.

b. Os pontos são os mesmos do item a.