www.estudar.com.vc

Cálculo II

Resumo e Exercícios P3

Resuminho Teórico e Fórmulas Parte 1

Funções de Três Variáveis

$$w = f(x, y, z)$$

Definida em $\mathbb{R}^3$, apenas um valor de w para cada (x, y, z).

<u>Domínio de Função de Três Variáveis</u>:

Valores que podem ser colocados nas variáveis controladas, exceto as restrições.

<u>Domínio máximo</u>: $\mathbb{R}^3$

<u>Superfície de Nível</u>:

A superfície de nível k é tal que:

$$f(x, y, z) = k$$

Para cada k diferente, há uma equação de três variáveis diferente → Gráfico em 3D diferente.

<u>Vetor Gradiente:</u>

O gradiente de f (lê-se grad f ou del f) é:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x, y, z) = \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\right)$$

<u>Posição Relativa entre Gradiente e Reta Tangente:</u>

O gradiente é um vetor ortogonal a qualquer vetor ou reta tangente ao gráfico em questão, no ponto (x_0, y_0, z_0) em que ocorre a tangência e onde está definido o gradiente. Assim:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \perp \overrightarrow{\gamma'}(t_0)$$

Portanto, o produto escalar entre o gradiente e o vetor tangente é nulo:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{\gamma'}(t_0) = 0$$

<u>Equação da Derivada Direcional utilizando Gradiente:</u>

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0, z_0) = \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = < a, b, c >$$

<u>Equação do Plano Tangente:</u>

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} * (y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} * (z - z_0) = 0$$

Onde (x_0, y_0, z_0) é o ponto onde o plano tangencia a função $z = f(x, y)$.

<u>Reta Tangente por Interseção de Superfícies</u>:

Como a reta tangente é perpendicular ao gradiente, a reta tangente à curva dada pela interseção de duas superfícies será perpendicular tanto ao gradiente da função que origina a primeira superfície, quanto ao gradiente da função que origina a segunda superfície.

A reta tangente é:

$$r: P + \lambda \vec{v}$$

Onde $\vec{v}$ é um múltiplo do vetor tangente à curva.

A relação entre $\vec{v}$ e os gradientes é:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \perp \vec{v} \text{ e } \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0, z_0) \perp \vec{v}$$

Portanto, podemos obter $\vec{v}$ pelo produto vetorial entre os gradientes:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \times \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0, z_0)$$

Pontos Críticos, Máximos e Mínimos

Pontos Críticos:

São os pontos nos quais os valores das derivadas parciais são iguais a zero. Por meio deles, é possível estudar a mudança de direção da função, e, consequentemente, máximos e mínimos. Se o ponto crítico é um (x_0, y_0, z_0):

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, f_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ e } f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Ou seja, deve-se derivar a função e igualar a 0 para descobrir os pontos críticos.

Valores Extremos:

Valores extremos são os pontos de máximo e mínimo do gráfico, no gráfico como um todo ou em uma região específica.

Máximos Absolutos:

São os pontos (x_0, y_0, z_0) cujo valor de $f(x_0, y_0, z_0)$ é o maior possível, em toda a extensão do gráfico da função f:

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo:

$$f(x_0, y_0, z_0) > f(x, y, z), \text{ para } (x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$$

<u>Mínimos Absolutos:</u>

São os pontos (x_0, y_0, z_0) cujo valor de $f(x_0, y_0, z_0)$ é o menor possível, em toda a extensão do gráfico da função f:

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de mínimo:

$$f(x_0, y_0, z_0) < f(x, y, z), \text{ para } (x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$$

<u>Máximos Locais:</u>

São os pontos (x_0, y_0, z_0) cujo valor de $f(x_0, y_0, z_0)$ é o maior possível, dentro de uma região limitada que contenha o ponto; todavia, em toda a extensão do gráfico da função f, há pontos cujo valor de $f(x, y, z)$ são maiores que $f(x_0, y_0, z_0)$.

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo local:

$$f(x_0, y_0, z_0) > f(x, y, z), \text{ dentro de uma região limitada do gráfico}$$

$$\text{Mas } f(x, y, z) > f(x_0, y_0, z_0), \text{ para algum } (x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$$

<u>Mínimos Locais:</u>

São os pontos (x_0, y_0, z_0) cujo valor de $f(x_0, y_0, z_0)$ é o menor possível, dentro de uma região limitada que contenha o ponto; todavia, em toda a extensão do gráfico da função f, há pontos cujo valor de $f(x, y, z)$ são menores que $f(x_0, y_0, z_0)$.

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de mínimo local:

$f(x_0, y_0, z_0) < f(x, y, z)$, dentro de uma região limitada do gráfico

Mas $f(x, y, z) < f(x_0, y_0, z_0)$, para algum $(x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$

Ponto de Sela:

O ponto de sela é um ponto crítico cujo valor da função, calculada nele, não é máximo nem mínimo; ou seja, é um ponto crítico que não gera valor extremo.

Hessiano de uma Função de Duas Variáveis:

O Hessiano (ou função Hessiana) pode ser calculado pelo seguinte determinante:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$H(x, y) = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy} * f_{yx}$$

Teste da Segunda Derivada:

Para descobrir se um ponto crítico (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo local, mínimo local ou ponto de sela, aplicamos o teste da segunda derivada:

1. Calcula-se o Hessiano da função no ponto crítico, ou seja:

$$H(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) * f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0) * f_{yx}(x_0, y_0)$$

2. Observar o sinal do Hessiano:
   a. Se $H(x_0, y_0) < 0$, o ponto crítico é ponto de sela
   b. Se $H(x_0, y_0) = 0$, o Hessiano é inconclusivo e é necessário analisar os valores da função nas redondezas, para descobrir se existem valores maiores ou menores;
   c. Se $H(x_0, y_0) > 0$, o ponto crítico gera um valor extremo e deve-se proceder para o passo 3.

3. Analisar o valor da segunda derivada f_{xx}, caso $H(x_0, y_0) > 0$:
   a. Se $f_{xx} > 0$, o ponto é mínimo local;
   b. Se $f_{xx} < 0$, o ponto é máximo local.

Exercícios Parte 1

1. Plano Tangente à Superfície de Nível

P3 2016 – Questão 1 - Adaptada

Determine todos os pontos da superfície de nível 1 da função $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ em que seu plano tangente é paralelo ao plano $2x + y - 3z = 2$.

2. Superfície de Nível

P3 2014 – Questão 3 - Adaptada

Seja a superfície S dada pela equação $x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 10 = 0$.

a. Existe apenas um ponto A na superfície S tal que a reta normal a S e a A contém os pontos $(3,0,4)$ e $(1,-2,0)$. Determine o ponto A.

b. Sejam $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ diferenciáveis com $\nabla f(-2-1) = (b, 1)$. Suponha que a imagem de γ é a intersecção do gráfico de f com a superfície S, dada no item (a), e que o ponto $P = (-2,-1,-2)$ pertence à imagem de γ. Determine b de modo que os planos tangentes ao gráfico de f e à S sejam ortogonais no ponto P.

c. Dê uma equação da reta tangente à Im_γ no ponto P.

3. Interseção de Superfícies

P3 2013 – Questão 1 - Adaptada

Seja S a superfície de equação $2xy - 2y^2 + z^2 + 6z = 1$.

a. Encontre o plano tangente a S no ponto $(-4,-1,-1)$.

b. Considere a curva $C: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 = 1, 2x + 4y = z^2 \; e \; z < 0\}$. Determine os pontos de C nos quais a reta tangente é paralela ao plano encontrado no item (a).

c. Encontre uma parametrização para a intersecção da superfície S com o plano $x = 3y$.

4. Máximos e Mínimos Locais

P3 2015 – Questão 3 - Adaptada

Seja a função $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

d. Determine quais são os pontos críticos de f;

e. Classifique os pontos críticos, justificando, quanto a máximo local, mínimo local ou sela

5. Máximos e Mínimos Locais

P3 2016 – Questão 2 - Adaptada

Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = kx^3 + x^2 + 2y^2 - 4x - 4y$, onde k é um número real não nulo.

a. Para que valores de k a função f possui exatamente dois pontos críticos?

b. Classifique os dois pontos críticos de f obtidos no item anterior.

Gabarito Parte 1

1) $\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ e $\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

2)

a. $(2, -1,2)$
b. $b = 3$
c. $(-2, -1, -2) + \mu(-1,7,4)$

3)

a. $x + 2y - 2z + 4 = 0$
b. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{2}}\right)$
c. $\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\cos t\,, \frac{\sqrt{10}}{2}\cos t\,, \sqrt{10}\sin t - 3\right)$

4)

a. $(0,0)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$
b. $(0,0)$ é ponto de sela e $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ são mínimos locais.

5)

a. $k > -\frac{1}{12}, k \neq 0$
b. $\left(\frac{-1-\sqrt{1+12k}}{3k}, 0\right)$ é ponto de sela e $\left(\frac{-1+\sqrt{1+12k}}{3k}, 0\right)$ é mínimo local.

Resuminho Teórico e Fórmulas Parte 2

Máximos e Mínimos em Conjuntos Compactos

<u>Conjuntos Compactos:</u>

Um conjunto é compacto quando ele é, simultaneamente:

1. Limitado → não vai até o infinito, e consigo criar uma circunferência (para conjuntos 2D) ou uma bola (para conjuntos 3D) de forma que o conjunto esteja inteiramente dentro da circunferência/bola;

2. Fechado → a fronteira do conjunto, ou seja, a borda, faz parte do conjunto. Um conjunto aberto contém apenas o interior; um conjunto fechado contém interior e fronteira.

Em geral:

Um conjunto $g(x, y, z) < k$ é composto pelo interior

Um conjunto $g(x, y, z) = k$ é composto pela fronteira

Um conjunto $g(x, y, z) \leq k$ é composto por fronteira e interior

<u>Teorema de Weierstrass</u>

"*Se tenho uma função contínua e um conjunto compacto, a função com certeza possui pontos de mínimo absoluto e pontos de máximo absoluto sobre o conjunto compacto*".

Ou seja, para garantir que existem pontos de mínimo e máximo de uma $f(x, y, z)$ sobre um conjunto C:

1. A função f deve ser contínua em todos os pontos;

2. E o conjunto C deve ser compacto, ou seja, limitado e fechado.

Se as condições acima não são verificadas, nada pode se dizer sobre a existência de valores extremos em C.

Passos para Identificar Máximos e Mínimos sobre Conjuntos Compactos

Caso o conjunto compacto C inclua tanto a fronteira quanto seu interior, devemos:

1. Interior: Determinar o valor de $f(a, b)$, onde (a, b) é ponto crítico de f que está dentro do conjunto C. Registrar os valores calculados;

2. Fronteira: Determinar os valores extremos de f na fronteira de C, registrando o maior e o menor valor e o ponto correspondente;

3. Elencar os valores calculados na etapa 1 e 2, de forma que o maior é o máximo absoluto e o menor é o mínimo absoluto.

Caso o conjunto compacto C inclua somente a fronteira, devemos:

1. Fronteira: Determinar os valores extremos de f na fronteira de C, registrando o maior e o menor valor e o ponto correspondente;

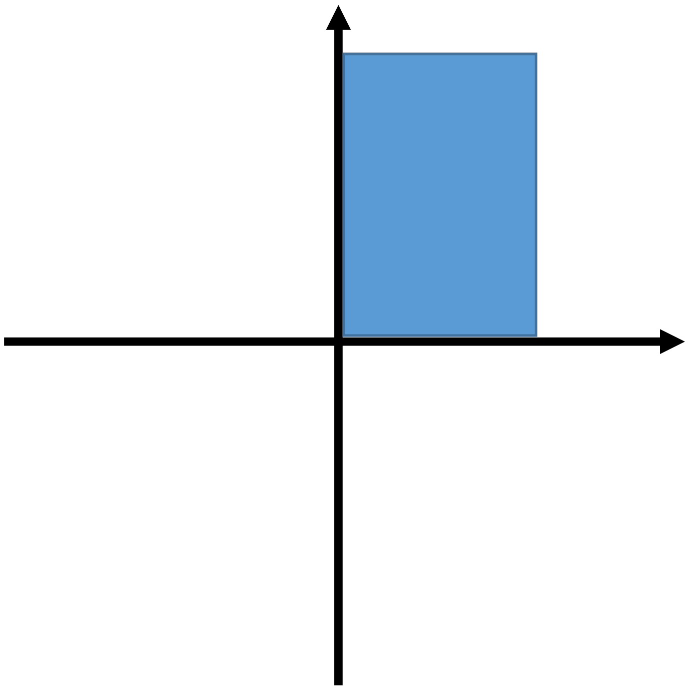
2. Elencar os valores calculados na etapa 1 e 2, de forma que o maior é o máximo absoluto e o menor é o mínimo absoluto.

Fronteira Parametrizável:

Em alguns casos, a fronteira do conjunto C em questão pode ser parametrizada, para que seja possível achar os maiores e menores valores de f na região.

Exemplo:

$$C: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2 \; e \; 0 \leq y \leq 3\}$$



a. Região inferior: $0 \leq x \leq 2 \; e \; y = 0$
b. Região superior: $0 \leq x \leq 2 \; e \; y = 3$
c. Região esquerda: $x = 0 \; e \; 0 \leq y \leq 3$
d. Região direita: $x = 2 \; e \; 0 \leq y \leq 3$

Multiplicador de Lagrange:

O multiplicador de Lagrange é um número real que indica que, em pontos de valor extremo sobre conjuntos compactos, o gradiente da função pode ser obtido através de múltiplos dos gradientes das funções que geram as restrições.

Neste caso, os vetores gradientes são L.D. (Linearmente Dependentes).

Método dos Multiplicadores de Lagrange para Uma Restrição:

Para estudar os candidatos a mínimos ou máximos na fronteira de um conjunto, podemos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange.

Se o conjunto C possui apenas uma restrição, os candidatos (x_0, y_0) a ponto máximo e mínimo de $f(x, y)$ na fronteira do conjunto são:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0) = \lambda * \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = k \end{cases}$$

Ou:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0 \\ g(x_0, y_0) = k \end{cases}$$

Se o conjunto C possui apenas uma restrição, os candidatos (x_0, y_0, z_0) a ponto máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ na fronteira do conjunto são:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) = \lambda * \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0, z_0) \\ g(x_0, y_0, z_0) = k \end{cases}$$

Ou:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_x(x_0, y_0, z_0) & f_y(x_0, y_0, z_0) & f_z(x_0, y_0, z_0) \\ g_x(x_0, y_0, z_0) & g_y(x_0, y_0, z_0) & g_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} = 0 \\ g(x_0, y_0, z_0) = k \end{cases}$$

Método dos Multiplicadores de Lagrange para Duas Restrições:

Se o conjunto C possui duas restrições, os candidatos (x_0, y_0, z_0) a ponto máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ na fronteira do conjunto são:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) = \lambda * \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0, z_0) + \mu * \overrightarrow{\nabla h}(x_0, y_0, z_0) \\ g(x_0, y_0, z_0) = k \\ h(x_0, y_0, z_0) = k \end{cases}$$

Ou:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0, z_0) & f_y(x_0, y_0, z_0) & f_z(x_0, y_0, z_0) \\ g_x(x_0, y_0, z_0) & g_y(x_0, y_0, z_0) & g_z(x_0, y_0, z_0) \\ h_x(x_0, y_0, z_0) & h_y(x_0, y_0, z_0) & h_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} = 0 \\ g(x_0, y_0, z_0) = k \\ h(x_0, y_0, z_0) = k \end{cases}$$

Aplicações Comuns:

1. Problema de volume: maximizar o volume de um corpo com restrição de área.

Exemplo: Maximizar volume de caixa retangular, com área máxima de 10 m^2

$$f(x, y, z) = V = xyz$$

$$C: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2xy + 2xz + 2yz\}$$

2. Problema de distância: encontrar os pontos mais e menos distantes de outro ponto, pertencendo a um conjunto.

Exemplo: Encontrar os pontos mais e menos distantes do ponto (x_P, y_P, z_P) no conjunto $C: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y - z = 1\ e\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Maximizar e minimizar $f(x, y, z) = (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2$

Onde (x_0, y_0, z_0) é o ponto onde o plano tangencia a função $z = f(x, y)$.

É essencial conhecer o gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, ou seja, as derivadas parciais da função $f(x, y)$, para que a equação do plano seja obtida.

Exercícios Parte 2

1. Máximos e Mínimos Absolutos e Lagrange

P3 2015 – Questão 2 - Adaptada

Deseja-se encontrar os pontos de máximo e mínimo de $f(x, y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$ sobre o conjunto $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + 3y \leq 10, x \geq 0, y \geq 0\}$.

a. Os problemas têm solução? Justifique.

b. Em caso afirmativo, determine tais pontos.

c. A função f acima tem ponto de máximo sobre o conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + 3y \leq 10, x > 0, y > 0\}$? E de mínimo? Justifique.

2. Máximos e Mínimos Absolutos e Lagrange

P3 2016 – Questão 1 - Adaptada

Determine os pontos de máximo e mínimo da função dada por $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ sobre o conjunto compacto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

3. Lagrange com Duas Restrições

P3 2015 – Questão 4 - Adaptada

Determine, caso existam, os pontos de máximo e mínimo da função $f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2$ sobre o conjunto

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 5 \text{ e } x + z = 2\right\}.$$

4. Problema de Distância

P3 2016 – Questão 3 - Adaptada

Determine os pontos de $\mathbb{R}^3$ mais próximos e os mais distantes da origem sobre os seguintes conjuntos compactos:

a. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1 \ e \ z = 3 - x^2 - y^2\}$;

b. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1 \ e \ z \leq 3 - x^2 - y^2\}$.

Gabarito Parte 2

1)

a. Sim

b. $f(x,0)$ e $f(0,y)$ são pontos de mínimo e $f\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ é ponto de máximo.

c. Não assume ponto de mínimo, $f\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ é ponto de máximo.

2) Máximo absoluto em $f\left(-2,\pm\sqrt{12}\right) = 47$ e mínimo absoluto em $f(1,0) = -7$.

3) $f\left(-\frac{1}{3},\pm\frac{2\sqrt{7}}{3},\frac{7}{3}\right) = -\frac{75}{9}$ é ponto de mínimo e $f(2,0,0) = 8$ é ponto de máximo.

4)

a. O ponto de menor distância é $f(1,1,1) = 3$ e o ponto de maior distância é $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},2\right) = 5$.

b. Os pontos são os mesmos do item a.