estudar.com.vc

Álgebra Linear II

Resumo e Exercícios P3

Fórmulas e Resumo Teórico

Projeção de um vetor sobre outro

Sejam v e w dois vetores. Define-se a projeção de v sobre w como:

$$proj\ v_w = \frac{< v, w >}{\|w\|^2} w$$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

O processo de Gram-Schmidt é um método para construir bases ortogonais a partir de uma base não ortogonal. Seja a base não ortogonal $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Construiremos a base $C = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, ortogonal, de modo que:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - proj\ v_{2_{w_1}}$$

$$w_3 = v_3 - proj\ v_{3_{w_2}} - proj\ v_{3_{w_1}}$$

$$w_n = v_n - \sum_{j=1}^{n-1} proj\ v_{n_{w_j}}$$

Repare, que basta tomar cada vetor da base B e retirar a projeção deste vetor dos vetores w calculados anteriormente.

Projeção Ortogonal

A projeção ortogonal é a solução para o problema da melhor aproximação. O problema reside em descobrir qual o melhor vetor pertencente a um determinado subespaço aproxima um outro vetor. Por exemplo, imagine que você possui um polinômio de segundo grau e deseja descobrir qual o polinômio de primeiro grau que melhor aproxima esse polinômio de grau 2. Isso consiste em projetar esse polinômio sobre o espaço dos polinômios de grau 1. Então, seja S o subespaço cuja base é: $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. É necessário que C seja ortogonal. Então, a projeção ortogonal de w sobre S é calculada como:

$$proj\ w_S = \frac{< w, v_1 >}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{< w, v_2 >}{\|v_2\|^2} v_2 + \cdots + \frac{< w, v_n >}{\|v_n\|^2} v_n$$

Operadores Simétricos

Seja $T: V \to V$ um operador. Dizemos que T é simétrico se:

$$< T(u), v > = < u, T(v) >, \qquad \forall\, u, v \in V$$

Essa é a definição formal e, dela, tiramos uma conclusão: a matriz do operador T com respeito a uma base ORTONORMAL é simétrica. Para ver o porquê, tome a base $B = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ORTONORMAL. Basta lembrar que um vetor v qualquer pode ser escrito com relação à base B (que é ORTONORMAL!!) da seguinte forma:

$$v =< v, w_1 > w_1 +< v, w_2 > w_2 + \cdots +< v, w_n > w_n$$

Vamos escrever, então, a matriz do operador T com relação à base B. Basta tomar as imagens $T(w_1), T(w_2), \dots, T(w_n)$ com respeito à base B. Mas pelo visto acima, ficamos com:

$$T(w_1) =< T(w_1), w_1 > w_1 +< T(w_1), w_2 > w_2 + \cdots +< T(w_1), w_n > w_n$$
$$T(w_2) =< T(w_2), w_1 > w_1 +< T(w_2), w_2 > w_2 + \cdots +< T(w_2), w_n > w_n$$
$$\vdots$$
$$T(w_n) =< T(w_n), w_1 > w_1 +< T(w_n), w_2 > w_2 + \cdots +< T(w_n), w_n > w_n$$

Então, para escrever a matriz basta pegar esses escalares e botar nas colunas, dando:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} < T(w_1), w_1 > & < T(w_2), w_1 > & \dots & < T(w_n), w_1 > \\ < T(w_1), w_2 > & < T(w_2), w_2 > & \dots & < T(w_n), w_2 > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < T(w_1), w_n > & < T(w_2), w_n > & \dots & < T(w_n), w_n > \end{bmatrix}$$

Olhe agora as posições a_{12} e a_{21}. Temos que:

$$a_{12} =< T(w_2), w_1 > \text{ e } a_{21} =< T(w_1), w_2 >$$

Como o operador É SIMÉTRICO por hipótese, teremos que:

$$< T(w_2), w_1 > = < T(w_1), w_2 > \Rightarrow a_{21} = a_{12}$$

Isso se repetirá pela matriz toda, então ela é simétrica pois:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Propriedade de Operadores Simétricos

Os operadores simétricos possuem uma série de características positivas. Listaremos:

A matriz de um operador simétrico é SIMÉTRICA com relação a uma base ORTONORMAL;

Operadores simétricos são sempre diagonalizáveis;

Os autoespaços com relação a autovalores DISTINTOS são ortogonais entre si. Tome por exemplo um operador com os seguintes autoespaços:

$$V(\lambda_1) = [v_1, v_2]$$

$$V(\lambda_2) = [w_1, w_2, w_3]$$

Dizer que os autoespaços são ortogonais é dizer que:

$$v_1 \perp w_1, w_2 \; e \; w_3$$

$$v_2 \perp \ w_1, w_2 \ e \ w_3$$

Por conta da propriedade acima, é sempre possível encontrar uma base ORTONORMAL de AUTOVETORES. Note, que basta aplicar Gram-Schmidt nos autoespaços de cada autovalor e, como os autoespaços distintos já são ortogonais entre si, unindo-os teremos uma base ortogonal.

Tome o exemplo dado anteriormente, com os autovalores λ_1 e λ_2.

$$V(\lambda_1) = [v_1, v_2] \rightarrow Aplique\ Gram - Schmidt \rightarrow V(\lambda_1) = [a_1, a_2]$$

$$V(\lambda_2) = [w_1, w_2, w_3] \rightarrow Aplique\ Gram - Schmidt \rightarrow V(\lambda_2) = [b_1, b_2, b_3]$$

Após o Gram-Schmidt:

$$a_1 \perp a_2$$

$$b_1 \perp b_2, b_3$$

$$b_2 \perp b_3$$

Mas ainda vale que:

$$a_1 \perp b_1, b_2 \ e \ b_3$$

$$a_2 \perp \ b_1, b_2 \ e \ b_3$$

Então, a base C

$$C = \{a_1, a_2, b_1, b_2, b_3\}$$

É ortogonal pelo fato de que todo mundo ficou ortogonal a todo mundo. Para torna-la ortonormal, basta dividir cada vetor por sua norma, como abaixo:

$$D = \left\{\frac{a_1}{\|a_1\|}, \frac{a_2}{\|a_2\|}, \frac{b_1}{\|b_1\|}, \frac{b_2}{\|b_2\|}, \frac{b_3}{\|b_3\|}\right\}$$

Redução de Quádricas e Cônicas

Uma quádrica tem equação geral da forma:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qyz + 2rxz + Ex + Fy + Gz + k = 0$$

Com $a, b, c, p, q, r, E, F, G, k \in \mathbb{R}$. Podemos escrever o trecho da equação que contem os termos quadrados e mistos usando uma matriz da seguinte forma:

$$Q(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Se fizermos o produto matricial acima, obteremos exatamente o trecho da equação geral. Agora, para reduzir a quádrica, basta diagonalizar a matriz de tamanho 3x3 que está no meio e contém os coeficientes na frente das variáveis.

Assuma que a equação geral foi escrita com relação a uma base $B = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$. Devemos mudar par uma base $C = \{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ que nos permita escrever a equação reduzida, onde $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ são os autovetores da matriz 3x3 vista acima. É importante notar que a base C deve estar ORTONORMALIZADA antes de fazermos isso tudo. Podemos fazer a tradução através da mudança de base:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [I]_{CB} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Note, então, que $[I]_{CB}$ é a matriz que possui os autovetores nas colunas.

Ao diagonalizar a matriz acima, obtivemos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \, e \, \lambda_3$. Como mudamos para as variáveis u, v, w, podemos reescrever o começo da equação como:

$$Q(u,v,w) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2$$

Todavia a segunda parte da equação deve ser traduzida para as novas variáveis u, v, w. Utilizamos então a igualdade matricial com a matriz $[I]_{CB}$ para ver quanto x, y, z valem em termos de u, v, w e substituímos na equação original.

Diagonalização sobre $\mathbb{C}$

É possível que uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tenha autovalores complexos, se o polinômio característico tiver raízes complexas. Como os coeficientes deste polinômio são REAIS, ter um número complexo como raiz implica ter o seu conjugado como raiz também. Ou seja, autovalores complexos vem aos pares: ele e seu conjugado, quando a matriz é REAL. Além disso, os autovetores são também conjugados. Para se obter o autovetor de um autovalor conjugado, basta conjugar cada uma de suas entradas.

Imagine que você obteve, em um operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuja matriz é real, o autovalor $\lambda = 1 + 2i$ e o autovetor respectivo $v = (1 + i, 3 - i)$. Como a matriz é real, teremos que:

$$\bar{\lambda} = 1 - 2i$$
$$\bar{v} = (1 - i, 3 + i)$$

Equações diferenciais

Resolveremos sistemas de equações diferenciais do seguinte tipo:

$$x'(t) = a.x(t)$$

Que tem como solução:

$$x(t) = ke^{at}$$

Agora tomaremos um sistema de equações diferenciais, como abaixo:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}.x_1(t) + a_{12}.x_2(t) + \cdots + a_{1n}.x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}.x_1(t) + a_{22}.x_2(t) + \cdots + a_{2n}.x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}.x_1(t) + a_{n2}.x_2(t) + \cdots + a_{nn}.x_n(t) \end{cases}$$

Podemos escrever esse sistema matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Ou, mais resumidamente:

$$X'(t) = A.X(t)$$

Onde as letras maiúsculas indicam as matrizes respectivas e A uma matriz com números reais.

Para resolver o sistema, basta diagonalizar a matriz A. Suponha que obtivemos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e os autovetores respectivos $v_1, v_2, \dots, v_n$. A solução geral do sistema passa a ser:

$$X(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + k_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + k_n e^{\lambda_n t} v_n$$

Com k_i sendo constantes quaisquer. Note que $e^{\lambda_i t} v_i$ é um vetor com n coordenadas, logo, essa soma resulta num vetor com n funções, que são as soluções do sistema.

Pode ocorrer da matriz A não ser diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, mas o ser sobre $\mathbb{C}$. Nesse caso, existirão autovalores e autovetores complexos. Mas podemos tomar só as soluções reais se quebrarmos a exponencial complexa em senos e cossenos:

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Sabe-se que, como A é uma matriz real, se um número complexo é autovalor, seu conjugado também o será. Então, teremos sempre soluções conjugadas. Imagine que sua solução do sistema resultou nos autovalores $\lambda_1 = 2 + 3i$ e, como o conjugado aparece sempre, $\overline{\lambda_1} = 2 - 3i$. Imagine que obtivemos o autovetor $v_1 = (1, 3 + i)$ e $\overline{v_1} = (1, 3 - i)$. Sua solução fica:

$$X(t) = k_1 e^{(2+3i)t}(1{,}3 + i) + k_2 e^{(2-3i)t}(1{,}3 - i)$$

Essa solução é correta, mas não podemos saber de imediato quais são as soluções puramente reais. Desse modo, operamos da seguinte forma: pega-se um dos termos da solução conjugada, o transformamos em duas funções reais e substituímos a solução conjugada pelas soluções reais. Veja:

$$e^{(2+3i)t}(1{,}3 + i) = e^{2t}(\cos 3t + i \sin 3t)(1, 3 + i) =$$

$$= e^{2t}(\cos 3t + i \sin 3t\,, (\cos 3t + i \sin 3t)(\,3 + i)) =$$

$$= e^{2t}(\cos 3t + i \sin 3t\,, 3 \cos 3t + 3i \sin 3t + i \cos 3t + i^2 \sin 3t) =$$

$$= e^{2t}(\cos 3t + i \sin 3t\,, 3 \cos 3t - \sin 3t + i\,(3 \sin 3t + \cos 3t)) =$$

$$= e^{2t}[(\cos 3t\,, 3 \cos 3t - \sin 3t) + i(\sin 3t\,, 3 \sin 3t + \cos 3t)] =$$

$$= (e^{2t} \cos 3t\,, 3e^{2t} \cos 3t - e^{2t} \sin 3t) + i(e^{2t} \sin 3t\,, 3e^{2t} \sin 3t + e^{2t} \cos 3t)$$

Repare no vetor a esquerda e no vetor que acompanha o número i. A solução não mudou, só foi reescrita de modo a separar o i. A solução inicial, portanto pode ser substituída por esses dois vetores assim:

$$X(t) = k_1 e^{(2+3i)t}(1{,}3 + i) + k_2 e^{(2-3i)t}(1{,}3 - i) \;\Leftrightarrow$$

$$X(t) = k_1(e^{2t} \cos 3t\,, 3e^{2t} \cos 3t - e^{2t} \sin 3t) + k_2\,(e^{2t} \sin 3t\,, 3e^{2t} \sin 3t + e^{2t} \cos 3t)$$

Agrupando melhor, teremos:

$$X(t) = (k_1 e^{2t} \cos 3t + k_2 e^{2t} \sin 3t\,, 3k_1 e^{2t} \cos 3t - k_1 e^{2t} \sin 3t + 3k_2 e^{2t} \sin 3t + e^{2t} k_2 \cos 3t)$$

$$X(t) = (e^{2t}(k_1 \cos 3t + k_2 \sin 3t), e^{2t}(3k_1 + k_2) \cos 3t + e^{2t}(-k_1 + 3k_2) \sin 3t)$$

Solução Particular

Tome o exemplo inventado acima, com a solução dada. A solução particular consiste em dar um ponto das funções para calcular as constantes k_i. Suponha que deu-se:

$$X(0) = (1,0)$$

Significa que a primeira função do vetor calculada em $t = 0$ vale 1 e a segunda função, calculada também em $t = 0$, vale 0. Logo:

$$e^{2.0}(k_1 \cos(3.0) + k_2 \sin(3.0)) = 1 \;\Rightarrow\; k_1 = 1$$
$$e^{2.0}(3k_1 + k_2)\cos(3.0) + e^{2.0}(-k_1 + 3k_2)\sin(3.0) = 0 \;\Rightarrow\; 3k_1 + k_2 = 0$$

Isso nos dá um sistema que, quando resolvido, dá:

$$k_1 = 1 \; e \; k_2 = -3$$

Logo, para a solução particular basta substituir as constantes encontradas, o que fornece:

$$X(t) = (e^{2t}(\cos 3t - 3\sin 3t), -10e^{2t}\sin 3t)$$

Exercícios

1. Autovalores e Autovetores e Operadores Simétricos

Questão 4, P2 – Poli-USP – 2012

Considere o espaço vetorial M2(R) munido do produto interno:

$$< \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} >= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Seja $T : M_2(R) \rightarrow M_2(R)$ um operador linear simétrico cujos únicos autovalores são 1, −2 e 3. Sabendo-se que:

$$V(-2) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right], V(3) = \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

pode-se afirmar que $T\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ é igual à:

A. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

2. Condições para um Operador Simétrico

Questão 6, P2 – Poli-USP – 2012

Considere o espaço vetorial R^3 munido do seu produto interno canônico e considere as bases:

$$B = \{(1,0,0)(1,1,0)(1,1,1)\}, C = \{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)\}$$

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $T : R^3 \to R^3$ o operador linear cuja matriz em relação às bases B e C é:

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & a+1 & 2a-b+1 \\ a & a & a+c \\ c & 2c & 2c \end{bmatrix}$$

Pode-se afirmar que T é simétrico se e somente se:

A. $a + b = 0$

B. $a + c = 0$

C. $a + b = c$

D. $b + c = a$

E. $a + c = b$

3. Quádricas e Cônicas

Questão 8, P3 – Poli-USP – 2013

Considere a superfície quádrica de equação

$$2x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 6yz - 5x + 3y = 2$$

com respeito a um sistema de coordenadas em E^3 de base ortonormal. Então, existe um sistema coordenadas em E^3 de base ortonormal, com respeito ao qual a quádrica tem equação da forma

A. $a(x')^2 + b(y')^2 + c(z')^2 = d, com\ a, b, c, d > 0$

B. $a(x')^2 + b(y')^2 = z', com\ a > 0, b < 0$

C. $a(x')^2 + b(y')^2 = z', com\ a > 0, b > 0$

D. $a(x')^2 + b(y')^2 + c(z')^2 = d, com\ a > 0, b > 0, c < 0, d \in \mathbb{R}$

E. $a(x')^2 = z', com\ a \in \mathbb{R}$

4. Quádricas e Cônicas

Questão 10, P3 – Poli-USP – 2013

Seja $\Sigma = (O, v_1, v_2)$ um sistema de coordenadas de E^2 em que $B = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de V^2. Seja Γ a cônica de equação

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$$

com respeito a um sistema Σ. Então, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V^2 tal que Γ tem uma equação reduzida com respeito ao sistema de coordenadas (O, e_1, e_2), em que:

A. $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)_B$ e Γ é uma hipérbole

B. $e_1 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)_B$ e Γ é uma hipérbole

C. $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)_B$ e Γ é uma parábola

D. $e_1 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)_B$ e Γ é uma elipse

E. $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)_B$ e Γ é uma elipse

5. Espaços Complexos

Questão 4, P3 – Poli-USP – 2013

Seja n um inteiro positivo. Considere as seguintes afirmações a respeito de uma matriz $A \in M_n(C)$, de um escalar λ ∈ C e de um vetor $v \in C_n$.

(I) Se $A \in M_n(R)$ e v é um autovetor de A associado ao autovalor λ, então $\bar{v}$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\bar{\lambda}$.

(II) Se λ é um autovalor de A, então $\bar{\lambda}$ também é um autovalor de A.

(III) Se $A \in M_n(R)$, A é diagonalizável sobre C e todos seus autovalores são reais, então A é diagonalizável sobre R.

Pode-se afirmar corretamente que

A. apenas (II) e (III) são verdadeiras.

B. apenas (I) e (III) são verdadeiras.

C. (I), (II) e (III) são verdadeiras.

D. apenas (I) e (II) são verdadeiras.

E. (I), (II) e (III) são falsas.

6. Diagonalização sobre R e C

Questão 11, P3 – Poli-USP – 2013

Sabendo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ tem polinômio característico igual a $p_A(t) = (1 - t)(t^2 - 4t + 13)$, pode-se afirmar corretamente que:

A. dim V(2 + 3i) = 2.

B. A é diagonalizável sobre C, mas não sobre R.

C. dim V(1) = 2.

D. os autovalores de A são todos reais, mas A não é diagonalizável.

E. os autovalores de A são todos reais, e A é diagonalizável.

7. Projeção Ortogonal

Questão 10, P1 - Poli – 2013

Considere o espaço vetorial C ([−π, π]) munido do produto interno

$$< f\ , g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt,$$

para todos f , g ∈ C ([−π, π]). Então, a melhor aproximação afim g (ou seja, da forma g(t) = at + b, com a, b ∈ R) da função $f(t) = sen\ t$ em [−π, π] é

<u>Escolha uma alternativa</u>

A. $g(t) = -\frac{1}{\pi^2}t$

B. $g(t) = \frac{3}{\pi^2}t$

C. $g(t) = \frac{2}{\pi^2}t - \frac{1}{\pi}$

D. $g(t) = -\frac{2}{\pi^2}t + \frac{1}{\pi}$

E. $g(t) = \frac{1}{\pi^2}t$

8. Projeção Ortogonal

Questão 16, P1 - Poli – 2012

Considere o espaço vetorial $P_2(R)$ munido do produto interno:

$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

Se $a, b \in R$ são tais que $u(t) = a + bt$ é o polinômio de $P_1(R)$ mais próximo de $v(t) = t^2$, então $a + b$ é igual a:

A. $\frac{2}{3}$
B. $-\frac{1}{3}$
C. 0
D. $-\frac{2}{3}$
E. $\frac{1}{3}$

9. Equações Diferenciais

Questão 1, P3 – Poli-USP – 2015

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & a & 2 \end{bmatrix}$$

seja diagonalizável. Considere a solução X do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1, 1)$. Se

$$X(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

então $x(t) + y(t) + z(t)$ é igual a:

A. $3e^{t} - e^{2t}$

B. $3e^{2t} - e^{t}$

C. $2e^{t}$

D. $e^{t} + e^{2t}$

E. $2e^{2t}$

10. Equações Diferenciais

Questão 13, P3 – Poli-USP – 2015

Seja $A \in M_4(R)$ uma matriz tal que $1 + i$ seja um autovalor de A e tal que o autoespaço de A correspondente a esse autovalor seja igual:

$$[(1, i, 0,0), (0,0,1,2 - i)]$$

Considere a solução X do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição X(0) = (0, 1, 0, 1). Temos que $X(\pi)$ é igual a:

A. $e^{\pi}(-1, -1,0,0)$

B. $e^{2\pi}(0,1,0, -1)$

C. $e^{\pi}(0, -1,0, -1)$

D. $e^{2\pi}(-1,0,0,1)$

E. $e^{\pi}(1,0, -1,0)$

Gabarito

1. Alternativa A
2. Alternativa D
3. Alternativa D
4. Alternativa E
5. Alternativa B
6. Alternativa B
7. Alternativa B
8. Alternativa A
9. Alternativa E
10. Alternativa C