www.estudar.com.vc

Integrais

Exercício 7d Integral Indefinida

Resolução

7. Calcule:

d. $\int \frac{9}{1+x^2}\,dx$

Assim como no item anterior, aparentemente $\frac{9}{1+x^2}$ não contem uma primitiva explícita.

No entanto, se passarmos o número 9 multiplicando a integral, teremos:

$$\int \frac{9}{1+x^2}\,dx = 9\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

A nova integral possui uma primitiva conhecida: $\arctan x$.

Dessa forma, a integral será:

$$\int \frac{9}{1+x^2}\,dx = 9\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = 9\arctan x + K, K \in \mathbb{R}$$

Resposta esperada: $\boldsymbol{9\arctan x + K,\ \ K \in \mathbb{R}}$

Observação: Se necessário, podemos relembrar o porquê de a derivada do $\arctan x$ valer a expressão encontrada na integral.

Sendo uma função $y = \tan x$, podemos achar a função $\arcsin x$ invertendo-a, lembrando que:

$$\text{Se } f(x) = \tan x, f^{-1}(x) = \arctan x$$

Assim, podemos trocar x por y, ficando:

$$x = \tan y$$

$$y = \arctan x$$

Para achar a derivada $f^{-1}(x) = y'$, podemos derivar dos dois lados, usando a derivada implícita:

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\tan y)$$

$$1 = \sec^2 y \cdot y'$$

$$y' = \frac{1}{\sec^2 y}$$

No entanto, sabemos que:

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

Dividindo tudo por $\cos^2 y$, temos:

$$\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\tan^2 y + 1 = \sec^2 y$$

E, como $\tan y = x$:

$$\sec^2 y = 1 + x^2$$

Portanto:

$$y' = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$