www.estudar.com.vc

Integrais

Exercício 2d Primitiva

Resolução

2. Encontre uma primitiva das seguintes funções:

d. $\boldsymbol{m(x) = \frac{1}{x}}$

Não podemos utilizar aqui a **Regra do Tombo ao contrário**:

$$\int x^{n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}, n \neq -1$$

De fato, se utilizássemos essa regra para integrar x^{-1}, obteríamos $M(x) = x^{0} = 1$.

No entanto, realizando a operação inversa, temos:

$$\frac{d}{dx}M(x) = \frac{d}{dx}(1) = 0 \neq f(x)$$

Isso acontece porque a derivada de uma constante é igual a zero.

Portanto, a regra do tombo ao contrário não pode ser utilizada no cálculo de uma primitiva de $m(x) = \frac{1}{x}$.

Para calcular esta primitiva, deve-se lembrar que:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}}$$

E tomar um cuidado especial. O **domínio** da função $\ln(x)$ é $]\mathbf{0},\infty[$**,** isto é, ela admite apenas valores **estritamente positivos** de x. Como não conhecemos o sinal de x em $m(x) = \frac{1}{x}$, devemos escrever a primitiva de f como:

$$M(x) = \ln|x| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

Uma possível dúvida é se, com a presença da **função módulo**, a derivada de M continua sendo m. Podemos facilmente verificar essa propriedade. Basta notar que

$$M(x) = \begin{cases} \ln(x), & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Então,

$$\frac{d}{dx}M(x) = \frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}, \quad x > 0$$

e, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}M(x) = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}.\frac{d(-x)}{dx} = \frac{1}{-x}.(-1) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}, \quad x < 0$$

Tanto no caso $x > 0$ quanto $x < 0$, temos que:

$$\frac{d}{dx}M(x) = \frac{1}{x} = m(x)$$

Portanto, $M(x) = \ln|x| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$.

Resposta esperada: $\boldsymbol{M(x) = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}}$