estudar.com.vc

Cálculo 4

Guia de Estudos P2

Resumo da Teoria

1. Revisão Séries de Potências

Vimos que séries de potências podem ser escritas na forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$. Toda série de potências é dotada de um intervalo de convergência I. Uma propriedade legal é que esse intervalo é simétrico em relação a x_0.

Em outras palavras, $I =]x_0 - R; x_0 + R[$, onde R é o raio de convergência da série. Este intervalo nos fornece os valores x para os quais a série converge. Ou seja, se tomarmos um x_a qualquer, sabemos que:

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_a-x_0)^n$ converge para um determinado numero L, se $x_a \in I$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_a-x_0)^n$ diverge, se $x_a \notin I$

Às vezes, apenas descobrir se determinada série converge não é suficiente. Queremos saber para onde ela converge. Vamos pegar o exemplo anterior, no caso em que $x_a \in I$. Sabemos que:

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_a-x_0)^n = L$

Mas quanto vale esse L? Com a teoria vista até agora é impossível dizer. Assim, quem vai entrar na jogada são as funções definidas por séries de potências.

2. Funções Definidas por Séries de Potências

Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ com um determinado intervalo de convergência I. Existe uma função $f(x)$ de tal forma que:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, para $x \in I$

Normalmente nos referimos a $f(x)$ como fórmula fechada de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$.

A igualdade anterior é importantíssima. Pegando novamente o exemplo anterior, em que $x_a \in I$, sabemos que:

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_a - x_0)^n = L$

Mas se conseguirmos encontrar $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, para $x \in I$, então:

$f(x_a) = L$.

Descobrimos então que nossa série converge para $f(x_a)$. Mas que método eu uso para descobrir minha $f(x)$? Derivação e Integração termo a termo.

3. Derivação e Integração Termo a Termo

Nesta parte, uma abordagem prática é mais eficiente. Vamos pegar a seguinte série como exemplo:

$1 - x + x^2 - x^3 \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \rightarrow$ P.G de razão $-x$ e primeiro termo $a_0 = 1$

Qual a fórmula fechada para uma P.G? Nessa aí não tem segredo, é teoria de ensino médio.

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$, para $|x| < 1$

Mas a maioria esmagadora das séries não é uma P.G. Por exemplo:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \rightarrow$ Isso não é nem de longe uma P.G.

A ideia é manipular esta série de modo a cair em uma P.G. Essas manipulações serão constituídas de derivações e/ou integrações.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = g(x)$$

Derivando ambos os lados:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = g'(x)$$

Opa, mas sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ é uma P.G, cuja fórmula de soma fechada é $\frac{1}{1+x}$, para $|x| < 1$.

$\frac{1}{1+x} = g'(x)$, para $|x| < 1$

Integrando ambos os lados:

$g(x) = \ln(1+x)$, para $-1 < x \leq 1$

Essa é a lógica que precisamos usar para encontrar a fórmula fechada de uma série.

- Temos uma série, que igualamos a uma função genérica $\left(i.e\ g(x)\right)$.
- Derivamos ou integramos até cairmos em uma P.G.
- Sabemos a fórmula que descreve a P.G.
- Fazemos a lógica reversa para chegar na $g(x)$.

Um exercício pode abordar este tema de duas maneiras:

- " Dada uma série descubra uma fórmula fechada para sua soma "
- " Dada uma função, descubra sua expansão em série de potencias "

4. Séries De Taylor

Obviamente, existem séries que, independentemente do número de integrações ou derivações que você faça, nunca chegaremos em uma P.G. Assim como existem funções cuja expansão é muito difícil de ser encontrada, somente derivando e integrando outras séries. Concluímos que o método da derivação e integração termo a termo, apesar de ser muito útil, é limitado.
Surge então o Teorema de Taylor. Este teorema afirma o seguinte:

Dada uma função $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$.

Prova-se que os coeficientes c_k podem ser calculados por:

$$c_k = \frac{f^k(x_0)}{k!}$$

A partir deste teorema, chegamos nas séries de funções importantes. As que mais são cobradas em prova são:

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, com $x \in R$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, com $x \in R$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, com $x \in R$

- $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, para $-1 \leq x \leq 1$
- $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, para $-1 < x < 1$

5. Erro em Séries Numéricas

Como estudado, uma série é uma soma infinita. Muitas vezes queremos determinar o valor aproximado desta soma. Cada aproximação tem um erro associado a ela. Por exemplo:

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \rightarrow$ Soma infinita

Podemos aproximar esta série, fazendo a soma até um certo k:

$\sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$

Obviamente, quanto maior o valor de k, mais precisa é a aproximação e menor o erro. Em contrapartida, quanto maior k mais termos preciso somar e mais difícil fica de executar esta soma.

Normalmente o exercício nos fornece um valor de erro máximo a ser cometido. Baseados neste valor de erro, precisamos achar o valor k mínimo que faz com o que o erro cometido, ao aproximar minha soma infinita por uma soma até k, seja menor que o valor de erro máximo fornecido.

Existem fórmulas que nos ajudam a associar o erro cometido em uma dada aproximação com o valor de k. Algumas destas fórmulas são mais gerais, e outras mais específicas de cada série.

Erro de Taylor:

O erro cometido ao aproximar uma função $f(x)$ por seu polinômio de ordem k é:

$$E(x) = \frac{f^{k+1}(x')(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Erro em Séries Alternadas:

O erro cometido ao se aproximar uma série alternada ($\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$) por uma soma até um certo k é:

$$E \leq |a_{k+1}|$$

Métodos Genéricos (valem para qualquer série):

Sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{k} a_n + \sum_{k+1}^{\infty} a_n$

Assim, ao dizermos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cong \sum_{n=0}^{k} a_n$ o erro cometido é $\sum_{k+1}^{\infty} a_n$

Prova-se que:

$\sum_{k+1}^{\infty} a_n \leq \int_{k+1}^{\infty} f(x)dx \rightarrow$ Método da Integral

Onde $f(x)$ é tal que $f(n) = a_n$

Outra forma de majorar o erro é tentar manipular a expressão $\sum_{k+1}^{\infty} a_n$, e daí chegar em uma fórmula que associe o erro com o grau k

6. Séries de Fourier

Assim como as séries de potencias descrevem uma função como um somatório de potências de x, a série de Fourier descreve uma função como um somatório de senos e cossenos.

Matematicamente, temos que a série de Fourier de uma função $f(x)$, definida de $-L \leq x \leq L$ é:

$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, onde

- $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \rightarrow$ “Valor médio de $f(x)$”
- $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \, cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \rightarrow$ “Parte par de $f(x)$”
- $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \rightarrow$ “Parte ímpar de $f(x)$”

Muitas vezes o exercício pede para esboçar o gráfico de $S(x)$. Alguns detalhes merecem destaque:

1. No intervalo de $-L \; a \; L$:

- $S(x) = f(x)$, nos pontos onde $f(x)$ é contínua.
- $S(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, nos pontos de descontinuidade.

- $S(L) = S(-L) = \frac{f(L)+f(-L)}{2}$.

2. Fora de $-L\ a\ L$:

- $S(x)$ é periódica de período $2L$.
- Em resumo, basta repetir o gráfico obtido de $-L$ a L para outros intervalos.

Funções definidas em semi-intervalos:

Algumas vezes um exercício pode pedir a série de Fourier de uma função $f(x)$ definida de $0 \leq x \leq L$

Neste caso trabalhamos com extensões da $f(x)$

1. Extensão ímpar:

- Definimos $g^{\sim}(x)$ de tal forma que
- $g^{\sim}(x) = g(x)$, para $x \in [0, \pi]$
- $g^{\sim}(x) = -g(-x)$, para $x \in [-\pi, 0]$
- A série de $g(x)$ é igual a série da $g^{\sim}(x) \rightarrow$ Série de Senos

2. Extensão par:

- Definimos $g^{\sim}(x)$ de tal forma que
- $g^{\sim}(x) = g(x)$, para $x \in [0, \pi]$
- $g^{\sim}(x) = g(-x)$, para $x \in [-\pi, 0]$
- A série de $g(x)$ é igual a série da $g^{\sim}(x) \rightarrow$ Série de Cossenos

Identidade de Parseval:

Dada uma função $f(x)$, definida de $-L \leq x \leq L$, com sua série dada por:

$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, onde

A seguinte igualdade é válida:

$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx$ $\rightarrow$ Identidade de Parseval

Exercícios

1. Derivação e Integração Termo a Termo

I. Determine as expansões em séries de potências em torno de $x_0 = 0$, das seguintes funções, e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

Obs.: Esse é o famoso "dada a função, descubra a série".

a. $\frac{1}{x^2+25}$

b. $\frac{1}{(1+x)^2}$

c. $\frac{2x}{1+x^4}$

d. $\ln\left(\frac{1}{1+3x^2}\right)$

II. Obter uma expressão para a soma das séries abaixo e os respectivos raios de convergência:

Obs.: Esse é o famoso "dada a série, descubra a função"

a. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

b. $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$

c. $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 \ldots$

d. $4 + 5x + 6x^2 + 7x^3 \ldots$

2. Séries de Taylor + Erros

I. Desenvolva em séries de potencias as seguintes funções e calcule $f(1)$, com erro inferior a 10^{-6}. Considere a função da letra a) valendo 1, para $t = 0$.

a. $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$
b. $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$

II. Calcule, usando séries de Taylor, $\frac{d^{320}\arctan(0)}{x}$ e $\frac{d^{321}\arctan(0)}{x}$.

III. Obtenha um valor aproximado de

a. e, com erro inferior a 10^{-5}
b. $\frac{\pi}{4}$, com erro inferior a 10^{-5}
c. $\ln 2$, com erro inferior a 10^{-5}

3. Séries de Fourier

I. Ache a série de Fourier de $f(x)$, e faça os gráficos de f e da função soma da série encontrada:

a. $f(x) = |x|, -\pi < x \leq \pi$
b. $f(x) = |\cos x|, -\pi < x \leq \pi$
c. $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq \pi$
d. $f(x) = 1,\ 0 < x < \pi$

II. Calcule a soma das séries:

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Gabarito:

1.

Parte I

a. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{5^{2n+2}}$

b. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^{4n+1}$

d. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{2n}}{n}$

Parte II

a. $\ln(1+x)$

b. $\frac{x}{(1-x)^2}$

c. $\frac{1+x}{(1-x)^3}$

d. $\frac{4-3x}{(1-x)^2}$

2.

Parte I

a. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$

b. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(n)!(2n+1)}$

Parte II

0 e $(320)!$

Parte III

Demonstração em aulão.

3.

Parte I

a. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos((2n-1))x)}{(2n-1)^2}$, soma: |x|, se $-\pi \leq x \leq \pi$ e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.

b. $\frac{2}{\pi}(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$, soma: |cos x|, para $x \in \mathbb{R}$.

c. Demonstração em aulão.

d. $\frac{4}{\pi}(sen\ x + \frac{1}{3}sen\ 3x + \frac{1}{5}sen\ 5x + \ldots), 0 < x < \pi$

Parte II

a. $\frac{\pi^2}{8}$

b. $\frac{\pi^2}{12}$

c. Demonstração em aulão.