



www.estudar.com.vc

Lista de Exercícios

Polinômio de Taylor

Cálculo I POLI





1. Polinômio de Taylor de Ordem 1

Elaboração própria

Expanda as seguintes funções polinômios de Taylor de ordem 1, em torno dos respectivos pontos:

- $f(x) = x^2$, em torno de $x = 2$.
- $f(x) = \sin(x)$, em torno de $x = \frac{\pi}{4}$.
- $f(x) = x$, em torno de $x = 4$.

2. Polinômio de Taylor de Ordem n, Resto de Lagrange e Aproximação

Elaboração própria

Considere a função $f(x) = x^3$.

- Expanda a função $f(x)$ em um polinômio de Taylor de ordem 2, em torno de $x = 2$.
- Expanda a função $f(x)$ em um polinômio de Taylor de ordem 3, em torno de $x = 2$.
- Estime o valor de $f(2,1)$ usando o polinômio de Taylor de ordem 2.
- Calcule o erro por Resto de Lagrange do valor obtido no item anterior.

3. Aproximação por Polinômio de Taylor

Elaboração própria

- Estime o valor de $\sin(0,5)$, por meio de um Polinômio de Taylor de ordem 2 da função $f(x) = \sin(x)$, em torno de $x = 0$.



- b.** Estime a diferença entre o valor real de $\sin(0,5)$ e o calculado no item anterior.
- c.** Estime o valor de $\sin(0,5)$, por meio de um Polinômio de Taylor de ordem 3 da função $f(x) = \sin(x)$, em torno de $x = 0$.
- d.** Estime a diferença entre o valor real de $\sin(0,5)$ e o calculado no item anterior.

4. Desigualdade

P2 2017 Cálculo I Poli, Exercício 8 Adaptado

Prove que, para todo $x \geq 1$,

$$\left| \arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2} \right| \leq \frac{(x-1)^2}{2}$$

5. Polinômio de Taylor

P2 2016 Cálculo I Poli, Exercício 1 Adaptado

Use o polinômio de Taylor, da função $f(x) = \cos x$ em torno de $x_0 = 0$, de menor grau possível, para obter uma aproximação de $\cos 0,1$ com erro inferior à 10^{-5} .

6. Aproximação de Integral pelo Polinômio de Taylor

P3 2015 Cálculo I Poli, Exercício 4 Adaptado

- a.** Seja $n \geq 1$ um inteiro. Determine $P(x)$ o Polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^{2 \cdot x}$ em torno do ponto $x = 0$. Obtenha uma expressão para o erro $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, em que $x \in \mathbb{R}$.



b. Use o polinômio do item anterior para estimar $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{10} \cdot e^{2 \cdot x} \cdot dx$ com erro menor do que 10^{-5} .

7. Diferencial

Elaboração própria

Resolva os seguintes problemas, utilizando o conceito de diferencial:

a. O volume de um cubo é dado por $V = a^3$, onde a equivale ao tamanho de sua aresta. Se, inicialmente, a aresta mede 2 m, mas, por conta do forte calor, ela sofre um acréscimo de 10 cm, calcule o acréscimo máximo do volume do cubo.

b. Um dia, um indivíduo resolve investir com suas reservas de 1.000,00 reais, por meio de um regime de juros compostos. Desta forma, o montante deste investidor será, após 2 meses (período em que ele finalizará seu investimento), de $M = 1.000 \cdot (1 + i)^2$, onde i é a taxa do investimento. Se, inicialmente, a renda aumentava 10% mensalmente ($i = 0,1$), mas, em algum instante, a taxa sofre um decréscimo, aumentando 8% por mês, em vez de 10%, calcule o decréscimo máximo de capital, após os 2 meses, se comparado com a taxa inicial.



Gabarito

1.

a. $P(x) = 4 \cdot x - 4$

b. $P(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{4-\pi}{4}\right)$

c. $P(x) = \frac{1}{4} \cdot x + 1$

2.

a. $P_2(x) = 6 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 8$

b. $P_3(x) = x^3$

c. 9,26

d. $R(x) = 0,001$

3.

a. 0,5

b. $-\frac{0,125}{6} \leq R(0,5) \leq 0$

c. 0,4792

d. $0 \leq R(0,5) \leq 0,0026$

4. Demonstração em vídeo

5. $1 - \frac{(0,1)^2}{2!}$

6.

a. $P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^i(0)}{i!} \cdot x^{2 \cdot i}$



$$\frac{2^{n+1} \cdot e^{2\bar{x}} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Onde:

$$\begin{cases} \bar{x} \in]0, x[& \text{se } x > 0 \\ \bar{x} \in]x, 0[& \text{se } x < 0 \end{cases}$$

b.

$$\frac{1}{11 \cdot 2^{11}} + \frac{2}{12 \cdot 2^{12}} + \frac{2}{13 \cdot 2^{13}} + \frac{4}{3 \cdot 14 \cdot 2^{14}}$$

Com erro menor do que 10^{-5} .

7.

a. $1,2 \text{ m}^3$

b. 44 reais.