www.estudar.com.vc

P2 2017 Poli USP
Adaptada
Exercício 8 Desigualdade
Explicação

8. Prove que, para todo $x \geq 1$,

$$\left|arctg(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2}\right| \leq \frac{(x-1)^2}{2}.$$

Como essa desigualdade não tem funções muito parecidas do mesmo lado, o método utilizado para provar desigualdades desse tipo será, geralmente, o **Polinômio de Taylor**.

Vamos começar checando o Polinômio de Taylor de primeira ordem para a função $\boldsymbol{f(x) = arctg(x)}$.

Sabemos que a derivada de f é:

$$f'(x) = \left(arctg(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

E que o Polinômio de Taylor de grau 1 pode ser escrito como

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Portanto, vamos em torno do valor $x_0 = 1$, porque é o único valor de referência do enunciado e porque a função f nesse ponto é um valor que conseguimos obter facilmente.

Como:

$$f(1) = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

O Polinômio de Taylor de ordem 1 em torno de $x_0 = 1$ será

$$P_1(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot (x-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{(x-1)}{2}$$

Agora que obtivemos essa expressão, podemos reescrever a parcela à esquerda da desigualdade que o enunciado forneceu como:

$$\left|\boldsymbol{arctg(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2}}\right| = |\boldsymbol{f(x) - P_1(x)}|$$

A diferença entre o valor da função e o valor que obtemos por meio do Polinômio é o **Erro do Polinômio de Taylor ($E(x)$)**.

Temos o Polinômio de Taylor de ordem 1:

$$|\boldsymbol{f(x) - P_1(x)}| = |\boldsymbol{E_1(x)}|$$

Pela fórmula aprendida na teoria, temos que o Erro do Polinômio de Taylor de primeira ordem é:

$$\boldsymbol{E_1(x) = \frac{f''(\bar{x}) \cdot (x - x_0)^2}{2}}$$

Onde $\bar{x}$ é um valor qualquer tal que:

$$1 = x_0 \leq \bar{x} \leq x$$

Portanto, vamos calcular a derivada de segunda ordem no ponto $\bar{x}$:

$$f''(\bar{x}) = \left(arctg(\bar{x})\right)'' = \left(\frac{1}{1+\bar{x}^2}\right)' = -\frac{2\bar{x}}{(1+\bar{x}^2)^2}$$

Reescrevendo E_1:

$$E_1(x) = -\frac{2\bar{x}}{(1+\bar{x}^2)^2} \cdot \frac{(x-1)^2}{2} = -\frac{\bar{x} \cdot (x-1)^2}{(1+\bar{x}^2)^2}$$

Como $\bar{x}$ é **maior** do que 1, ele é com certeza um valor positivo. E, como todos os outros termos estão ao quadrado, sabemos que, devido ao sinal de menos:

$$E_1(x) < 0$$

E, portanto,

$$|E_1(x)| = -E_1(x) = \frac{\bar{x} \cdot (x-1)^2}{(1+\bar{x}^2)^2}$$

Reescrevendo a desigualdade do enunciado:

$$\frac{\bar{x} \cdot (x-1)^2}{(1+\bar{x}^2)^2} \leq \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{2\bar{x}}{(1+\bar{x}^2)^2} \leq 1}$$

Agora, precisamos provar a desigualdade **acima**. Temos que $\bar{x} \geq 1$, então, multiplicando por $\bar{x}$, que é necessariamente um valor positivo, dos dois lados, chegamos em $\bar{x}^2 \geq \bar{x}$.

Podemos somar 1 do lado esquerdo da desigualdade que o lado esquerdo continuará maior que o lado direito:

$$1 + \bar{x}^2 \geq \bar{x}$$

Fazendo uso novamente da desigualdade $\bar{x} \geq 1$, elevando os dois lados ao quadrado e somando 1:

$$1 + \bar{x}^2 \geq 2$$

Aqui, podemos separar a fração da desigualdade $\frac{2\bar{x}}{(1+\bar{x}^2)^2} \leq 1$ em:

$$\frac{2\bar{x}}{(1+\bar{x}^2)^2} = \left(\frac{2}{1+\bar{x}^2}\right) \cdot \left(\frac{\bar{x}}{1+\bar{x}^2}\right)$$

Como temos uma multiplicação de duas frações nas quais o **numerador é menor ou igual ao denominador**, as duas serão valores menores ou iguais a 1.

As duas frações também serão **positivas**, já que $\bar{x}$ é positivo e só envolvemos soma, multiplicação e divisão de termos positivos.

A **multiplicação** das duas frações também será **menor ou igual a 1**.

$$\frac{2\bar{x}}{(1+\bar{x}^2)^2} = \left(\frac{2}{1+\bar{x}^2}\right) \cdot \left(\frac{\bar{x}}{1+\bar{x}^2}\right) \leq 1$$

E,

$$|E_1(x)| = \frac{\bar{x} \cdot (x - 1)^2}{(1 + \bar{x}^2)^2}$$

Multiplicando a desigualdade $\frac{2\bar{x}}{(1+\bar{x}^2)^2} \leq 1$ por $\frac{(x-1)^2}{2}$, podemos concluir como queríamos demonstrar, que:

$$\boldsymbol{|E_1(x)| = \frac{\bar{x} \cdot (x - 1)^2}{(1 + \bar{x}^2)^2} \leq \frac{(x - 1)^2}{2}}$$

Respostas esperada: Demonstração acima.