www.estudar.com.vc

Física 4

Guia de Estudos P2

1. Efeito Doppler relativístico

O efeito Doppler relativístico é a aparente mudança de frequência da onda eletromagnética quando há movimento relativo entre fonte e observador.

Quando a fonte se afasta do observador com velocidade v, a frequência Doppler f será dada por:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

Onde:

$$f_0 = frequência\ natural\ da\ onda$$

Quando a fonte se aproxima do observador com velocidade v, a frequência Doppler f será dada por:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}$$

2. Energia e Momento Relativísticos

Para fenômenos que ocorrem a uma velocidade comparável à velocidade da luz é necessário realizar alguns ajustes nas equações fundamentais da mecânica clássica.

$$\vec{P}(momento\ linear) = \gamma m \vec{v}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Assim, a força resultante $\vec{F}$ que atua em uma partícula será dada por:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v})$$

O valor da força resultante dependerá do ângulo entre $\vec{F}\ e\ \vec{v}$, no caso de os vetores estarem situados ao longo do eixo Ox, obtém-se:

$$F = \gamma^3 ma$$

No caso de $\vec{F}\ e\ \vec{v}$ perpendiculares, por exemplo em um movimento circular, a expressão da força será:

$$F = \gamma ma$$

Utilizando o valor de F obtido no caso em que $\vec{F} \parallel \vec{v}$ pode-se determinar a energia cinética relativística do corpo através do teorema do trabalho e da energia, que diz que o trabalho de uma força conservativa é igual a variação de energia cinética de um corpo, logo:

$$K = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$$

$$K = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ma\,dx}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$a\,dx = \frac{dv}{dt}\,dx = dv\frac{dx}{dt} = v\,dv$$

$$K = \int_0^v \frac{m\,v_x\,dv_x}{(1 - v_x^2/c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$K = (\gamma - 1)mc^2$$

Se definirmos a energia de repouso de uma partícula como $E_0 = mc^2$, a energia total de uma partícula será a soma da energia de repouso com sua energia cinética, donde concluímos que :

$$E(energia\ total) = \gamma mc^2$$

Combinando a expressão do momento linear relativístico com a expressão da energia total da partícula, pode-se escrever:

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$$

Utilizando essas expressões valem os casos em que havia conservação da energia e do momento linear, como por exemplo em colisões.

3. Radiação do Corpo Negro

Um corpo negro é uma superfície ideal que absorve toda a radiação que nela incide, ou seja nenhuma luz o atravessa e nem é refletida.

$$Intensidade = \frac{Potência\ (W)}{Área\ (m^2)}$$

A **Intensidade ($\boldsymbol{I}$)** da radiação emitida por um corpo negro é dada pela Lei de Stefan-Boltzmann:

$$I = \sigma T^4$$

$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ \frac{W}{m^2\ K^4}$

$T = temperatura\ em\ Kelvin$

A intensidade não é distribuída uniformemente em todos os comprimentos de onda, sua distribuição pode ser medida através da **emitância espectral $I(\lambda)$,** de tal forma que a intensidade também será dada por:

$$I = \int_0^\infty I(\lambda)\, d\lambda$$

As curvas de Intensidade para diferentes temperaturas foram determinadas de forma mais precisa em 1900 por Planck, no que ficou conhecido como a lei de radiação de Planck, essa lei pode ser descrita pela seguinte equação:

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)}$$

$h = constante\ de\ Planck$
$k = constante\ de\ Boltzmann$
$T = temperatura\ absoluta$

Se derivarmos a expressão da lei de Planck, obteremos o comprimento de onda no qual a emitância espectral é máxima (λ_{max}) em função da temperatura absoluta T e com isso vamos observar que o produto $\lambda_{max} * T$ é constante , isso ficou conhecido como a **lei de deslocamento de Wien.**

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{4{,}965\ kT}$$

$$\lambda_{max} * T = \frac{hc}{4{,}965\ k} = 2{,}9 \times 10^{-3}\ m.K$$

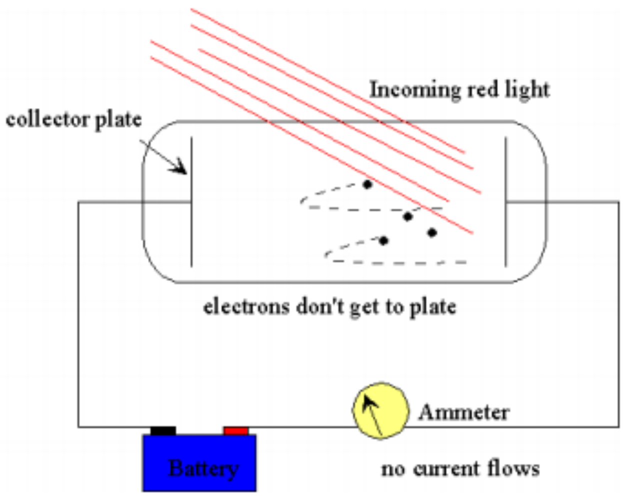
4. Efeito Fotoelétrico

O efeito fotoelétrico consiste na emissão de elétrons que ocorre quando a luz incide sobre uma superfície, esse efeito só é observado quando a luz possui uma energia suficiente para superar a barreira de potencial que mantém os elétrons confinados.

A quantidade de energia mínima necessária para desprender um elétron de determinada superfície é chamada de **função trabalho $\boldsymbol{\phi}$** dessa superfície.

Frequência de corte ($\boldsymbol{f_0}$) $=$ frequência mínima na qual ocorre efeito fotoelétrico, ou seja, abaixo dessa frequência não há elétrons desprendidos do material.

Potencial de corte ($\boldsymbol{V_0}$) $=$ potencial aplicado entre a superfície onde será analisado o efeito fotoelétrico e a placa coletora, de tal forma que a corrente medida no arranjo é nula (figura abaixo), a energia cinética máxima que os elétrons deixam a placa será eV_0, *onde e é a carga do elétron*.



Energia do fóton: Um fóton pode ser entendida como uma partícula sem massa que viaja sempre na velocidade da luz. Dessa forma, a sua energia total (relativística) é dada por :

$$E = pc$$

Por outro lado, a energia do fóton também é dada por:

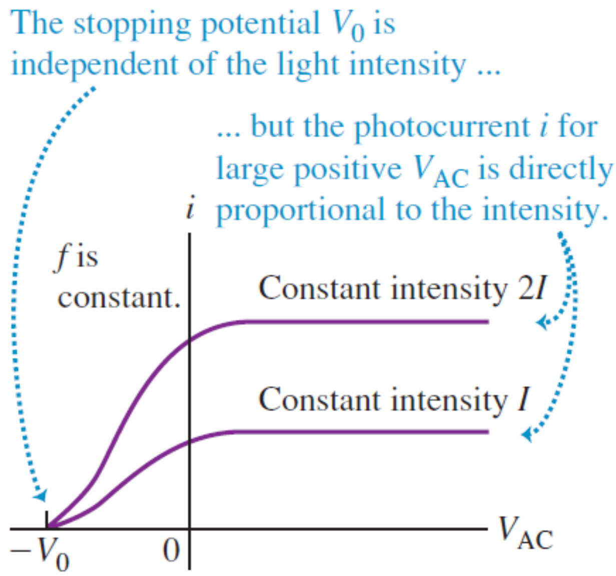
$$E = hf$$

$h = constante\ de\ Planck$
$f = frequência\ da\ luz$

Einstein aplicou a conservação da energia para determinar qual a máxima energia cinética (K_{max}) de um elétron que se desprende de um material por efeito fotoelétrico, a relação encontrada por ele foi:

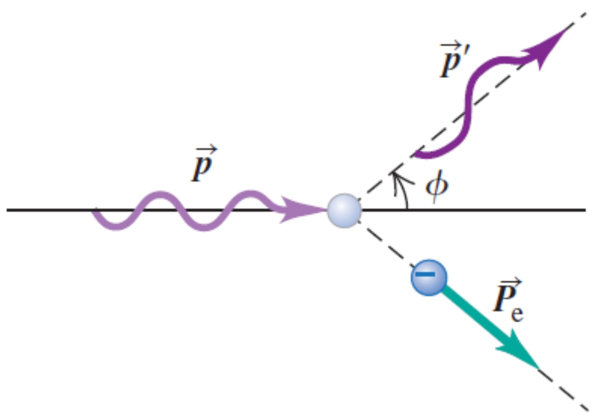
$$K_{max} = hf - \phi$$
$$eV_0 = hf - \phi$$

Note que o potencial de corte V_0 independe da intensidade da luz aplicada, ou seja, independe da amplitude do campo elétrico que constitui a luz, porém ele aumenta com o aumento de f, o aumento da intensidade da luz que incide na placa faz com que haja um aumento nos fotoelétrons emitidos e com isso há um aumento na corrente de regime medida no amperímetro (figura abaixo)



5. Espalhamento Compton

O espalhamento Compton caracteriza-se pela mudança de comprimento de onda de um fóton quando o mesmo colide com um elétron em repouso. O esquema do da situação é representado na figura abaixo.



Descrição da situação: Um fóton de momento linear inicial $\vec{p}$, colide com um elétron inicialmente em repouso, após a colisão o fóton espalhado se propaga em uma direção que faz um ângulo ϕ com a direção de propagação inicial do fóton, agora com momento linear $\vec{p}'$; o elétron adquire movimento se propagando em outra direção diferente do fóton espalhado.

Momento linear do fóton:

$$E = hf = pc \;\; e \; c = \lambda f$$
$$\Rightarrow p = \frac{hf}{c}$$
$$\Rightarrow p = \frac{hf}{\lambda f} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{\lambda}}$$

Aplicando os princípios de conservação de energia e momento linear relativísticos para a situação, lembrando que o momento linear é uma grandeza vetorial, pode-se escrever:

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$

Comentário: caso a dedução fique complicada, suponha que o elétron forma um ângulo θ com o eixo Ox e aplique a conservação de momento separadamente para as componentes em $x \; e \; y$, mais detalhes no livro Modern Physics Serway.

6. Espectros de Linhas

O espectro de linhas consiste em fótons com energia específica emitidos por átomos de determinado elemento, durante a emissão do fóton a energia do átomo varia da mesma quantidade de energia que é emitida pelo fóton, assim cada átomo possuiria um conjunto de **níveis de energia**, de tal forma que o átomo não poderia possuir um valor de energia intermediário a esses níveis.
De acordo com Bohr um átomo pode fazer uma transição de um estado de maior energia para um de energia inferior emitindo um fóton cuja energia é igual à diferença entre esses níveis de energia, assim:

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = E_i - E_f$$

Através de um conjunto de experimentos com o átomo de hidrogênio determinou-se uma relação para os comprimentos de onda dos fótons emitidos para uma dada condição inicial, essa série ficou conhecida com série de Balmer.

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Onde:
$R = constante\ de\ Rydberg = 1{,}097\times10^{7}\ m^{-1}$

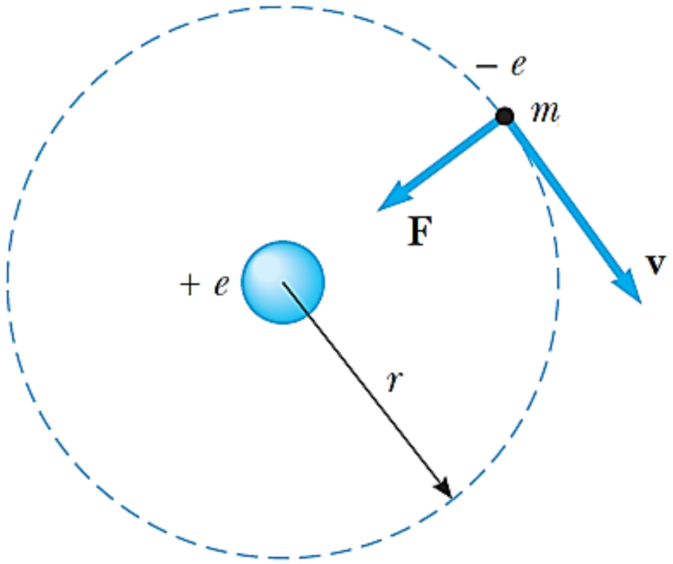
Considerando a série de Balmer e a hipótese de Bohr, pode-se determinar a energia na camada n do átomo de hidrogênio como sendo:

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2} \quad n = 1{,}2{,}3 \ldots$$

7. Modelo de Bohr

Bohr postulou que um elétron em um átomo pode circular em torno do núcleo descrevendo *órbitas estacionárias* sem emitir nenhuma radiação. Outra importante conclusão de Bohr foi que o momento angular $(\vec{L})$ dos elétrons era quantizado, ou seja, assumia valores discretos, mais precisamente múltiplos inteiros de $h/2\pi$.

$$L = mr_n v_n = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$$



$$F = \frac{mv_n^2}{r^n}\ (centrípeta)$$
$$F = \frac{e^2}{4\pi \mathcal{E}_0\, r_n^2}\ (\,Culomb)$$

$$r_n = \frac{\mathcal{E}_0 h^2}{\pi\, m\, e^2} * n^2$$

(Raios orbitais no modelo de Bohr)

$$v_n = \frac{e^2}{2\mathcal{E}_0 h} * \frac{1}{n}$$

(Velocidades orbitais no modelo de Bohr)

Somando a energia cinética K_n com a energia potencial U_n obtém-se a energia orbital no modelo de Bohr, ou seja, a energia do elétron que ocupa a camada n.

$$K_n = \frac{mv_n^2}{2} \; e \quad U_n = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \, r_n}$$

$$E_n = K_n + U_n = \frac{-me^4}{\varepsilon_0^2 \, 8 \, n^2 h^2} = -\frac{13{,}6}{n^2} \; eV$$

Átomos com número atômico $Z \neq 1$

Para átomos com número atômico Z, basta substituir na fórmula obtida para o átomo de hidrogênio e^2 por Ze^2, pois agora o núcleo não possui mais carga $+e$ e sim $+Ze$.

$$E_n = -13{,}6 \frac{Z^2}{n^2} \; eV$$

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi \, m \, e^2} * \frac{n^2}{Z}$$

8. Comprimento de Onda de Broglie

De Broglie postulou que uma partícula de massa m, viajando com uma velocidade v $(não\ relativística)$ deve ter um comprimento de onda associado a seu momento linear, tal como um fóton. Esse comprimento de onda ficou conhecido como comprimento de onda de De Broglie, que será calculado por:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

9. Difração de Elétrons

Considerando o conceito de comprimento de onda de De Broglie e a experiência com a fenda dupla, pode-se determinar a posição dos máximos de interferência quando se utiliza um feixe de elétrons

$$d \sin \theta = m\lambda, com\ m \epsilon Z\ (máximos)$$
$$\lambda = \frac{h}{p}$$
$$d \sin \theta = m\left(\frac{h}{p}\right)\ com\ m \epsilon Z$$

Supondo que um elétron (não relativístico) de carga $-e$ seja acelerado por um potencial V_a, pode-se escrever que:

$$K = e\, V_a = \frac{p^2}{2m}$$
$$p = \sqrt{2meV_a}$$
$$d \sin \theta = \frac{mh}{\sqrt{2meV_a}}, com\ m \epsilon Z$$

Exercícios

1. Um farol A emite luz vermelha de frequência $f_1 = 4\times10^{14}\ Hz$. Outro farol B, em repouso em relação ao farol A, emite luz verde de frequência $f_2 = 6\times10^{14}\ Hz$. Um observador que se move ao longo da linha que une os faróis A e B, com velocidade v em relação a eles, vê as luzes emitidas por A e B com a mesma cor.

a. Em que sentido se move o observador? De A para B, ou de B para A? Justifique.
b. Calcule a velocidade do observador em relação à velocidade da luz.

2. Para testar a teoria da relatividade, um farol na Terra envia sinais luminosos a cada 2 segundos para um nave espacial que se afasta da Terra com velocidade $0{,}6\ c$. A espaçonave recebe estes sinais e os retransmite de volta ao farol. Qual o intervalo de tempo entre os sinais recebidos pelo farol?

3. A emitância espectral $I(\lambda, T)$ de uma estrela atinge o máximo num comprimento de onda igual a 600 nm. Calcule a temperatura da estrela. Se ela tem raio $R = 10^9 m$ calcule a potência total emitida pela estrela. Suponha que a estrela emite radiação como um corpo negro.

4. Uma partícula com massa de repouso m_0 e energia total igual a duas vezes sua energia de repouso colide com uma partícula 2, idêntica, em repouso. Após a colisão forma-se uma única partícula com massa de repouso M_0. Nos itens abaixo, expresse suas respostas em termos da velocidade da luz c e de m_0.

a. Calcule a velocidade v da partícula antes da colisão
b. Calcule a velocidade V e a massa de repouso M_0 da partícula resultante.
c. Calcule a energia cinética da partícula resultante.

5. Luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 410\, nm$, proveniente de uma fonte com intensidade I, incide sobre três superfícies metálicas constituídas de lítio (Li), berílio (Be) e mercúrio (Hg). As funções de trabalho de cada um destes materiais são dadas por $\phi^{Li} = 2{,}3\ eV, \phi^{Be} = 3{,}9\ eV\ e\ \phi^{Hg} = 4{,}5\ eV$, respectivamente.

a. Determine em que casos é possível observar o efeito fotoelétrico

b. Calcule a diferença de potencial necessária para frear os fotoelétrons (potencial frenador ou potencial de corte) nos casos em que os fotoelétrons são observados, conforme o item (a).

c. Se ao invés da fonte com intensidade I tivéssemos utilizando uma fonte com intensidade $2I$, mas com o mesmo comprimento de onda de 410 nm, como mudariam os itens (a) e (b) e o número de fótons elétrons emitidos?

6. A função de trabalho para o metal lantânio é de 3,3 eV. Suponha que uma placa deste metal seja iluminada com luz de comprimento de onda igual a 2000 Å. Considere os fotoelétrons <u>não relativísticos</u> emitidos da placa com o máximo de energia possível. Nessas condições:

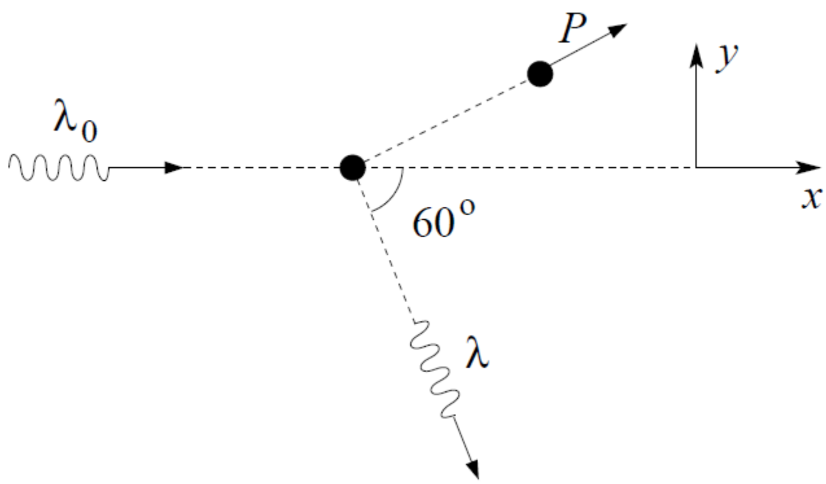
a. Calcule o valor da energia cinética desses elétrons

b. Calcule o comprimento de onda de De Broglie desses elétrons. Dê sua resposta em função da constante de Planck h, da massa m_0 do elétron e da sua energia cinética K.

7. Considere um átomo de hidrogênio em repouso com massa total M_H. Suponha que o elétron deste átomo passou do primeiro estado excitado para o estado de energia mais baixa, através da emissão de um fóton. Utilize o modelo de Bohr para responder os itens abaixo. Forneça seus resultados apenas em termos de h, c, da massa de repouso do elétron m_0 e da constante de Rydberg R_H.

a. Calcule o comprimento de onda do fóton emitido.
b. Ao emitir o fóton, o átomo de H deve recuar na direção oposta para que haja conservação do momento. A velocidade de recuo V do átomo de H é muito menor do que a velocidade da luz c. Calcule V.
c. Se o fóton emitido for espalhado por um elétron em repouso, qual será o maior valor possível λ_{max} ?

8. Num espalhamento Compton, um fóton de comprimento de onda λ_0 incide em um elétron incialmente em repouso (massa m_0). O fóton espalhado é observado numa direção que faz um ângulo de 60° em relação à direção de incidência. As repostas devem ser dadas em termos de λ_0, m_0, h e c.



a. Determine o comprimento de onda λ do fóton espalhado.
b. Calcule a energia cinética do elétron após a colisão.
c. Calcule a componente P_y do momento linear do elétron após a colisão.

Gabarito

1.

a. $O\ sentido\ do\ movimento$ é $de\ B\ para\ A$

b. $v = \frac{1}{5}c$

2. 1 sinal a cada 8 segundos

3. $P = 15\,\pi \times 10^{25}\ W$

4.

a. $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

b. $M_0 = \sqrt{6}\,m_0$

c. $K = \left(3 - \sqrt{6}\right)m_0 c^2$

5.

a. $há\ efeito\ fotoelétrico\ apenas\ para\ o\ Li$

b. 0,7 V.

c. As respostas (a) e (b) não variam. Com uma intensidade maior haverá mais fotoelétrons emitidos

6.

a. $K_{max} = 2{,}7\ eV$

b. $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 K}}$

7.

a. $\lambda = \frac{4}{3R_H}$

b. $V = \frac{3hR_H}{4M_H}$

c. $\lambda_{max} = \frac{4}{3R_H} + \frac{2h}{m_0 c}$

8.

a. $\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{2m_0 c}$

b. $K = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + \frac{h}{2m_0 c}}$

c. $P_y = \frac{h\sqrt{3}}{2\lambda_0 + \frac{h}{m_0 c}}$