www.estudar.com.vc

Cálculo 2

Guia de Estudos P2

www.estudar.com.vc

Resuminho Teórico e Fórmulas Parte 1

Derivadas Parciais

Para calcular a derivada parcial em x, deve-se manter as outras variáveis fixas (constantes), de forma que se comportem como números. Mesma lógica para derivar em y ou em qualquer variável.

Derivada parcial em x (lê-se del f, del x):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y)$$

Derivada parcial em y (lê-se del f, del y):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = y(x,y)$$

Exemplo:

$$f(x,y) = x^2 + y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \text{ e } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1$$

Interpretação:

A derivada parcial é a inclinação da reta tangente ao ponto, com uma variável variando e as outras fixas. Pode ser interpretada também como a tendência a variar o resultado de $f(x,y)$, quando uma variável varia uma unidade e a outra permanece fixa.

Derivada em Pontos não Definidos:

Nos pontos (x_0, y_0) nos quais a derivada não é definida (ou contínua), a derivada parcial é tal que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Derivada de Segunda Ordem:

Para derivadas não nulas, é possível calcular a segunda derivada, ou seja, as derivadas parciais das derivadas.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy}$$

Diferenciabilidade

Uma função é diferenciável se o plano tangente a um ponto (x_0, y_0) aproxima suficientemente bem o valor de $f(x, y)$.

<u>Condições básicas de uma função diferenciável:</u>

Toda função diferenciável em (x_0, y_0):

1. É definida no ponto (x_0, y_0);
2. É contínua no ponto (x_0, y_0);
3. Possui as derivadas parciais $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$;
4. Possui as derivadas parciais no ponto (x_0, y_0).

Toda função diferenciável em segunda ordem em (x_0, y_0):

1. É definida no ponto (x_0, y_0);
2. É contínua no ponto (x_0, y_0);
3. Possui as derivadas parciais $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ gerais e no ponto (x_0, y_0);
4. As derivadas são contínuas no ponto (x_0, y_0).
5. Existem as derivadas de segunda ordem gerais e no ponto (x_0, y_0)
6. A igualdade $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se verifica.

De todas as condições acima, *a 6 é a mais importante*.

<u>Representação</u>:

Se f é diferenciável, ela é de classe C^1

Se f é diferenciável em segunda ordem, ela é de classe C^2

Se f é diferenciável em qualquer ordem, ela é de classe C^n

Passos para identificar diferenciabilidade de $f(x, y)$ em (x_0, y_0):

1. Verificar se a função é definida e contínua em (x_0, y_0);
2. Calcular as derivadas parciais $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$;
3. Calcular as derivadas parciais no ponto (x_0, y_0), ou seja, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$;
4. Ver se as derivadas são contínuas no ponto (x_0, y_0).

Se a condição se verifica, a função é diferenciável no ponto. Senão, fazer passo 5:

5. Calcular o limite de diferenciabilidade abaixo:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - [f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} * (y - y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

Onde $f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} * (y - y_0)$ é a equação do plano tangente.

Se o limite do passo 5 for igual a 0, a função é diferenciável. Senão, ela não é diferenciável no ponto em questão.

Vetor Gradiente

Derivada Direcional:

A derivada é a inclinação da reta tangente a um ponto. Mas a derivada direcional é a inclinação da reta que tem direção de um vetor unitário $\vec{u}$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = a * \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + b * \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Onde:

$$\vec{u} = < a, b >$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

Derivada Direcional em Versores Definidos por Ângulos:

Os versores (vetores de norma 1) $\vec{u}$ podem ser indicados por um ângulo θ:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \cos\theta * \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \sin\theta * \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Onde:

$$\vec{u} = < \cos\theta\, , \sin\theta >$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = 1$$

Vetor Gradiente:

O vetor gradiente é composto pelas derivadas parciais, nas coordenadas relativas às variáveis em que são calculadas as derivadas.
O gradiente de f (lê-se grad f ou del f) é:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)$$

Posição Relativa entre Gradiente e Reta Tangente:

O gradiente é um vetor ortogonal a qualquer vetor ou reta tangente ao gráfico em questão, no ponto (x_0, y_0) em que ocorre a tangência e onde está definido o gradiente. Assim:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0) \perp \overrightarrow{\gamma'}(t_0)$$

Portanto, o produto escalar entre o gradiente e o vetor tangente é nulo:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{\gamma'}(t_0) = 0$$

Lembrando que o produto escalar entre dois vetores é:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_a, y_a) \cdot (x_b, y_b) = x_a x_b + y_a y_b$$

<u>Equação da Derivada Direcional utilizando Gradiente:</u>

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$$

<u>Valor Máximo da Derivada Direcional:</u>

A derivada direcional atinge valor máximo quando o vetor $\vec{u}$ tem a direção do vetor gradiente $\overrightarrow{\nabla f}$, ou seja, quando:

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\nabla f}}{|\overrightarrow{\nabla f}|}$$

A *taxa máxima de variação* (valor máximo da derivada direcional) é:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} max(x_0, y_0) = |\overrightarrow{\nabla f}|(x_0, y_0)$$

Exercícios Parte 1

1. Derivadas Parciais e Diferenciabilidade

P2 2016 – Questão 1 - Adaptada

Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+3y^2}, se\ (x,y) \neq (0,0); \\ 0, se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, explicitando o domínio.

b. $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.

c. f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

d. f é diferenciável em $(x,y) \neq (0,0)$? Justifique.

2. Derivadas Parciais

P2 2015 – Questão 1 - Adaptada

Seja $f(x,y) = \sqrt[3]{3x^4 + 2y^4}$.

a. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b. Verifique se a função $\frac{\partial f}{\partial x}$ é ou não contínua em $(0,0)$.

3. Derivadas Parciais e Diferenciabilidade

P2 2014 – Questão 1 - Adaptada

Dada a função $f(x,y) = x(x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$, determine:

a. O domínio das funções derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

b. Os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ nos quais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas.

c. Os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ nos quais f é diferenciável.

4. Vetor Gradiente e Derivada Direcional

P2 2016 – Questão 4 - Adaptada

Sejam a função $f(x,y) = 2x^3 - 3y^2$ e (x_0, y_0) um ponto em $\mathbb{R}^2$. Determine os pontos (x_0, y_0) que satisfazem as seguintes duas condições: $\nabla f(x_0, y_0)$ é paralelo à reta tangente à curva $x^3y - 2xy^3 + xy + y^2 - 1 = 0$ no ponto $(1, -1)$; e $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = 4\sqrt{5}$, onde $\vec{u}$ é o versor do vetor $(2,1)$.

Gabarito Parte 1

1)

a. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3y^4-x^2y^2}{(x^2+3y^2)^2}$ e $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$ (domínio: $\mathbb{R}^2$)

b. $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2x^3y}{(x^2+3y^2)^2}$ e $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$ (domínio: $\mathbb{R}^2$)

c. Não

d. $(x,y)\neq(0,0)$

2)

a. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{4x^3}{(3x^4+2y^4)^{\frac{2}{3}}}$ e $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$ (domínio: $\mathbb{R}^2$)

b. A função é contínua em $(0,0)$.

3)

a. $\mathbb{R}^2$

b. $\mathbb{R}^2$

c. $\mathbb{R}^2$

4) $\left(\sqrt{2},\frac{2}{3}\right)$ e $\left(-\sqrt{2},\frac{2}{3}\right)$

Resuminho Teórico e Fórmulas Parte 2

Regra da Cadeia

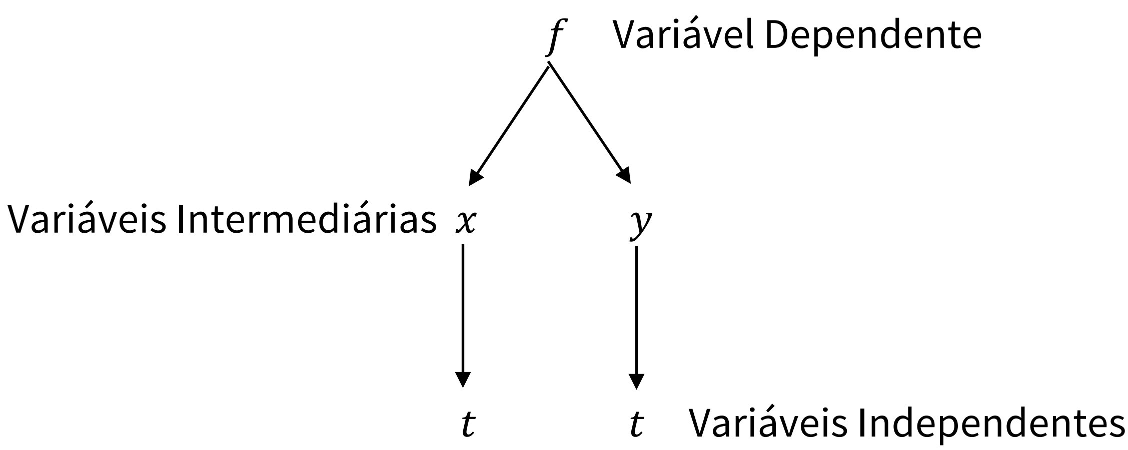
A regra da cadeia para funções de duas ou mais variáveis ocorre quando se quer derivar a função em relação a uma variável que não é a variável imediatamente dependente de f.

<u>Variáveis Dependentes, Intermediárias e Independentes:</u>

As variáveis dependentes são as que dependem de todas as outras, as intermediárias dependem de algumas e as independentes são as controladas, que não dependem de nenhuma.

Se tenho:

$$f(x,y), x = x(t) \text{ e } y = y(t)$$



<u>Regra da Cadeia para Uma Variável Independente:</u>

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{dy}{dt}$$

Regra da Cadeia para Duas Variáveis Independentes:

Se tivermos:

$$f(x,y), x = x(t,u), y = y(t,u)$$

A regra da cadeia será:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial u}$$

Versão Geral da Regra da Cadeia:

Se tivermos:

$$f(x,y,z,w), x = x(t,u), y = y(t,u), z = z(t,u), w = w(t,u)$$

Com n variáveis intermediárias e independentes. A regra da cadeia será:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} * \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial w} * \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} * \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} * \frac{\partial w}{\partial u}$$

Ou seja, deve-se somar as derivadas da variável dependente pelas variáveis intermediárias, e multiplicar as derivada anteriores pelas derivadas das variáveis intermediárias pela variável independente em questão.

Diferenciação Implícita:

Podemos definir implicitamente uma função $z = f(x, y)$ dada como uma equação de três variáveis, de forma que uma função $F(x, y, z)$ seja a definição implícita.

Exemplo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Assim, as *derivadas implícitas* são:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Plano Tangente

Equação do Plano Tangente:

$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} * (y - y_0)$$

Onde (x_0, y_0, z_0) é o ponto onde o plano tangencia a função $z = f(x, y)$.

É essencial conhecer o gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, ou seja, as derivadas parciais da função $f(x,y)$, para que a equação do plano seja obtida.

Exercícios Parte 2

1. Regra da Cadeia - Elaborado

P2 2016 – Questão 2 - Adaptada

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$, tal que

$$f(t^2 + t, t + 1) = t^2 + 2t + 1, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Sabendo-se que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,2) = 1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,2) = 2$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(2,2)$.

2. Regra da Cadeia - Elaborado

P2 2015 – Questão 2 - Adaptada

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f = f(x,y)$, uma função de classe C^2e seja

$$g(u,t) = f(u^2 - t^2, 2ut).$$

Em termos das derivadas parciais de f:

a. Calcule $\frac{\partial g}{\partial u}$

b. Calcule $\frac{\partial g}{\partial t}$

c. Calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$

d. Calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$

e. Determine o valor de $r > 0$ para que a igualdade

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,t) + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(u,t) = 48\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2 - t^2, 2ut) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2 - t^2, 2ut)\right]$$

seja válida para todo $(u,t) \in \mathbb{R}^2$ com $u^2 + t^2 = r^2$.

3. Plano Tangente

P2 2016 – Questão 3 - Adaptada

Sejam $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e a curva $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\gamma(t) = (t^3 + 1, -t, t^6 + 2t^3 - 2t^2 + 1)$$

Suponha que a imagem de γ está contida no gráfico de f e que o ponto $(3,0,10)$ pertence ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, -1, f(2, -1))$. Determine uma equação desse plano.

4. Plano Tangente

P2 2014 – Questão 2 - Adaptada

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\gamma(t) = (t, 2t^2, t^2), \forall t \in \mathbb{R}$$

Seja r a reta tangente à curva de nível 4 de f no ponto $(2,8)$. Sabendo que a imagem de γ está contida no gráfico de f e que a reta r passa pelo ponto $(1, -4)$, determine:

a. O vetor gradiente de f no ponto $(2,8)$;

b. A equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,8, f(2,8))$.

5. Plano Tangente

P2 2014 – Questão 2 - Adaptada

Seja $G = G(x, y)$ uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.

a. Sabendo que o plano tangente ao gráfico de G no ponto $(-2, -2, G(-2, -2))$ tem equação $x - y + 2z + 1 = 0$, determine o vetor $\nabla G(-2, -2)$.

b. Determine o valor de $G(-2, -2)$.

Gabarito Parte 2

1) $\frac{15}{2}$

2)

- **a.** $2u\frac{\partial f}{\partial x} + 2t\frac{\partial f}{\partial y}$
- **b.** $-2t\frac{\partial f}{\partial x} + 2u\frac{\partial f}{\partial y}$
- **c.** $2\frac{\partial f}{\partial x} + 4u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 8ut\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
- **d.** $-2\frac{\partial f}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 8ut\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4u^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
- **e.** $r = \sqrt{12}$

3) $4x + 4y - z - 2 = 0$

4)

- **a.** $(12, -1)$
- **b.** $12x - y - z - 12 = 0$

5)

- **a.** $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- **b.** $-\frac{1}{2}$