



www.estudar.com.vc

Cálculo 2

Guia de Estudos P2





Resuminho Teórico e Fórmulas Parte 1

Derivadas Parciais

Para calcular a derivada parcial em x , deve-se manter as outras variáveis fixas (constantes), de forma que se comportem como números. Mesma lógica para derivar em y ou em qualquer variável.

Derivada parcial em x (lê-se del f , del x):

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y)$$

Derivada parcial em y (lê-se del f , del y):

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y)$$

Exemplo:

$$f(x, y) = x^2 + y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x \text{ e } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 1$$

Interpretação:

A derivada parcial é a inclinação da reta tangente ao ponto, com uma variável variando e as outras fixas. Pode ser interpretada também como a tendência a variar o resultado de $f(x, y)$, quando uma variável varia uma unidade e a outra permanece fixa.



Derivada em Pontos não Definidos:

Nos pontos (x_0, y_0) nos quais a derivada não é definida (ou contínua), a derivada parcial é tal que:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Derivada de Segunda Ordem:

Para derivadas não nulas, é possível calcular a segunda derivada, ou seja, as derivadas parciais das derivadas.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xy}$$

Diferenciabilidade

Uma função é diferenciável se o plano tangente a um ponto (x_0, y_0) aproxima suficientemente bem o valor de $f(x, y)$.



Condições básicas de uma função diferenciável:

Toda função diferenciável em (x_0, y_0) :

1. É definida no ponto (x_0, y_0) ;
2. É contínua no ponto (x_0, y_0) ;
3. Possui as derivadas parciais $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$;
4. Possui as derivadas parciais no ponto (x_0, y_0) .

Toda função diferenciável em segunda ordem em (x_0, y_0) :

1. É definida no ponto (x_0, y_0) ;
2. É contínua no ponto (x_0, y_0) ;
3. Possui as derivadas parciais $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ gerais e no ponto (x_0, y_0) ;
4. As derivadas são contínuas no ponto (x_0, y_0) .
5. Existem as derivadas de segunda ordem gerais e no ponto (x_0, y_0)
6. A igualdade $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se verifica.

De todas as condições acima, a 6 é a mais importante.

Representação:

Se f é diferenciável, ela é de classe C^1

Se f é diferenciável em segunda ordem, ela é de classe C^2

Se f é diferenciável em qualquer ordem, ela é de classe C^n



Passos para identificar diferenciabilidade de $f(x, y)$ em (x_0, y_0) :

1. Verificar se a função é definida e contínua em (x_0, y_0) ;
2. Calcular as derivadas parciais $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$;
3. Calcular as derivadas parciais no ponto (x_0, y_0) , ou seja, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$;
4. Ver se as derivadas são contínuas no ponto (x_0, y_0) .

Se a condição se verifica, a função é diferenciável no ponto. Senão, fazer passo 5:

5. Calcular o limite de diferenciabilidade abaixo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - [f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} * (y - y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

Onde $f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} * (y - y_0)$ é a equação do plano tangente.

Se o limite do passo 5 for igual a 0, a função é diferenciável. Senão, ela não é diferenciável no ponto em questão.

Vetor Gradiente

Derivada Direcional:

A derivada é a inclinação da reta tangente a um ponto. Mas a derivada direcional é a inclinação da reta que tem direção de um vetor unitário \vec{u} .

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = a * \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + b * \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$



Onde:

$$\vec{u} = \langle a, b \rangle$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

Derivada Direcional em Versores Definidos por Ângulos:

Os versores (vetores de norma 1) \vec{u} podem ser indicados por um ângulo θ :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \cos \theta * \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \sin \theta * \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Onde:

$$\vec{u} = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = 1$$

Vetor Gradiente:

O vetor gradiente é composto pelas derivadas parciais, nas coordenadas relativas às variáveis em que são calculadas as derivadas.

O gradiente de f (lê-se grad f ou del f) é:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)$$

Posição Relativa entre Gradiente e Reta Tangente:

O gradiente é um vetor ortogonal a qualquer vetor ou reta tangente ao gráfico em questão, no ponto (x_0, y_0) em que ocorre a tangência e onde está definido o gradiente. Assim:

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) \perp \vec{\gamma}'(t_0)$$



Portanto, o produto escalar entre o gradiente e o vetor tangente é nulo:

$$\vec{\nabla}f(x_0, y_0) \cdot \vec{\gamma}'(t_0) = 0$$

Lembrando que o produto escalar entre dois vetores é:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_a, y_a) \cdot (x_b, y_b) = x_a x_b + y_a y_b$$

Equação da Derivada Direcional utilizando Gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \vec{\nabla}f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$$

Valor Máximo da Derivada Direcional:

A derivada direcional atinge valor máximo quando o vetor \vec{u} tem a direção do vetor gradiente $\vec{\nabla}f$, ou seja, quando:

$$\vec{u} = \frac{\vec{\nabla}f}{|\vec{\nabla}f|}$$

A taxa máxima de variação (valor máximo da derivada direcional) é:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} \max(x_0, y_0) = |\vec{\nabla}f|(x_0, y_0)$$



Exercícios Parte 1

1. Derivadas Parciais e Diferenciabilidade

P2 2016 – Questão 1 - Adaptada

$$\text{Seja } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+3y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

- Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, explicitando o domínio.
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.
- f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.
- f é diferenciável em $(x, y) \neq (0,0)$? Justifique.

2. Derivadas Parciais

P2 2015 – Questão 1 - Adaptada

$$\text{Seja } f(x, y) = \sqrt[3]{3x^4 + 2y^4}.$$

- Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- Verifique se a função $\frac{\partial f}{\partial x}$ é ou não contínua em $(0,0)$.

3. Derivadas Parciais e Diferenciabilidade

P2 2014 – Questão 1 - Adaptada

Dada a função $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$, determine:

- O domínio das funções derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- Os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nos quais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas.
- Os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nos quais f é diferenciável.



4. Vetor Gradiente e Derivada Direcional

P2 2016 - Questão 4 - Adaptada

Sejam a função $f(x, y) = 2x^3 - 3y^2$ e (x_0, y_0) um ponto em \mathbb{R}^2 . Determine os pontos (x_0, y_0) que satisfazem as seguintes duas condições: $\nabla f(x_0, y_0)$ é paralelo à reta tangente à curva $x^3y - 2xy^3 + xy + y^2 - 1 = 0$ no ponto $(1, -1)$; e $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = 4\sqrt{5}$, onde \vec{u} é o versor do vetor $(2, 1)$.



Gabarito Parte 1

1)

a. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3y^4 - x^2y^2}{(x^2 + 3y^2)^2} e \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$ (domínio: \mathbb{R}^2)

b. $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^3y}{(x^2 + 3y^2)^2} e \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$ (domínio: \mathbb{R}^2)

c. Não

d. $(x, y) \neq (0,0)$

2)

a. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x^3}{(3x^4 + 2y^4)^{\frac{2}{3}}} e \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$ (domínio: \mathbb{R}^2)

b. A função é contínua em $(0,0)$.

3)

a. \mathbb{R}^2

b. \mathbb{R}^2

c. \mathbb{R}^2

4) $(\sqrt{2}, \frac{2}{3}) e (-\sqrt{2}, \frac{2}{3})$



Resuminho Teórico e Fórmulas Parte 2

Regra da Cadeia

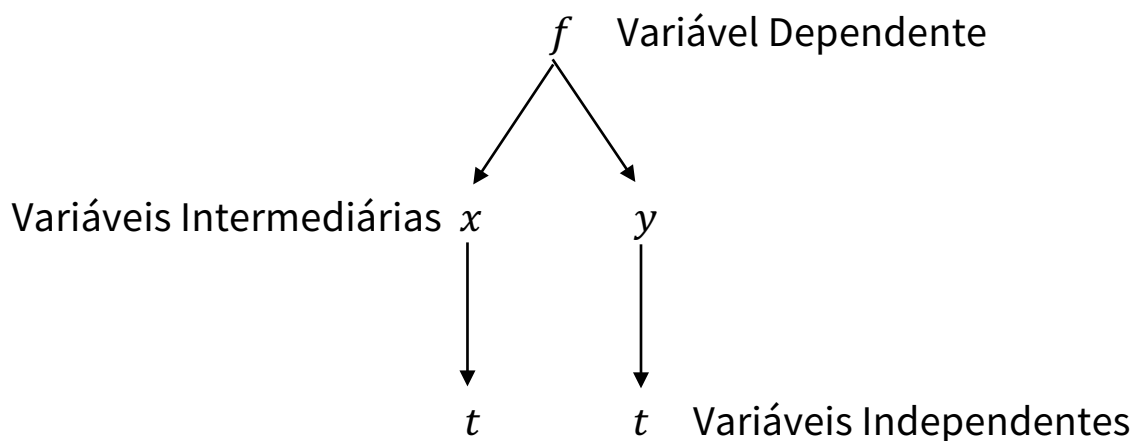
A regra da cadeia para funções de duas ou mais variáveis ocorre quando se quer derivar a função em relação a uma variável que não é a variável imediatamente dependente de f .

Variáveis Dependentes, Intermediárias e Independentes:

As variáveis dependentes são as que dependem de todas as outras, as intermediárias dependem de algumas e as independentes são as controladas, que não dependem de nenhuma.

Se tenho:

$$f(x, y), x = x(t) \text{ e } y = y(t)$$



Regra da Cadeia para Uma Variável Independente:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{dy}{dt}$$



Regra da Cadeia para Duas Variáveis Independentes:

Se tivermos:

$$f(x, y), x = x(t, u), y = y(t, u)$$

A regra da cadeia será:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial u}$$

Versão Geral da Regra da Cadeia:

Se tivermos:

$$f(x, y, z, w), x = x(t, u), y = y(t, u), z = z(t, u), w = w(t, u)$$

Com n variáveis intermediárias e independentes. A regra da cadeia será:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} * \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial w} * \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} * \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} * \frac{\partial w}{\partial u}$$

Ou seja, deve-se somar as derivadas da variável dependente pelas variáveis intermediárias, e multiplicar as derivadas anteriores pelas derivadas das variáveis intermediárias pela variável independente em questão.



Diferenciação Implícita:

Podemos definir implicitamente uma função $z = f(x, y)$ dada como uma equação de três variáveis, de forma que uma função $F(x, y, z)$ seja a definição implícita.

Exemplo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Assim, as *derivadas implícitas* são:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Plano Tangente

Equação do Plano Tangente:

$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} * (y - y_0)$$

Onde (x_0, y_0, z_0) é o ponto onde o plano tangencia a função $z = f(x, y)$.



É essencial conhecer o gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, ou seja, as derivadas parciais da função $f(x, y)$, para que a equação do plano seja obtida.

Exercícios Parte 2

1. Regra da Cadeia - Elaborado

P2 2016 - Questão 2 - Adaptada

Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 em \mathbb{R}^2 , tal que

$$f(t^2 + t, t + 1) = t^2 + 2t + 1, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Sabendo-se que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,2) = 1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,2) = 2$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(2,2)$.

2. Regra da Cadeia - Elaborado

P2 2015 - Questão 2 - Adaptada

Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, uma função de classe \mathcal{C}^2 e seja

$$g(u, t) = f(u^2 - t^2, 2ut).$$

Em termos das derivadas parciais de f :

a. Calcule $\frac{\partial g}{\partial u}$

b. Calcule $\frac{\partial g}{\partial t}$

c. Calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$

d. Calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$

e. Determine o valor de $r > 0$ para que a igualdade

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, t) + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(u, t) = 48 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2 - t^2, 2ut) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2 - t^2, 2ut) \right]$$

seja válida para todo $(u, t) \in \mathbb{R}^2$ com $u^2 + t^2 = r^2$.



3. Plano Tangente

P2 2016 – Questão 3 - Adaptada

Sejam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e a curva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\gamma(t) = (t^3 + 1, -t, t^6 + 2t^3 - 2t^2 + 1)$$

Suponha que a imagem de γ está contida no gráfico de f e que o ponto $(3, 0, 10)$ pertence ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, -1, f(2, -1))$.

Determine uma equação desse plano.

4. Plano Tangente

P2 2014 – Questão 2 - Adaptada

Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\gamma(t) = (t, 2t^2, t^2), \forall t \in \mathbb{R}$$

Seja r a reta tangente à curva de nível 4 de f no ponto $(2, 8)$. Sabendo que a imagem de γ está contida no gráfico de f e que a reta r passa pelo ponto $(1, -4)$, determine:

- O vetor gradiente de f no ponto $(2, 8)$;
- A equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 8, f(2, 8))$.

5. Plano Tangente

P2 2014 – Questão 2 - Adaptada

Seja $G = G(x, y)$ uma função de classe \mathcal{C}^2 em \mathbb{R}^2 .

- Sabendo que o plano tangente ao gráfico de G no ponto $(-2, -2, G(-2, -2))$ tem equação $x - y + 2z + 1 = 0$, determine o vetor $\nabla G(-2, -2)$.
- Determine o valor de $G(-2, -2)$.



Gabarito Parte 2

1) $\frac{15}{2}$

2)

a. $2u \frac{\partial f}{\partial x} + 2t \frac{\partial f}{\partial y}$

b. $-2t \frac{\partial f}{\partial x} + 2u \frac{\partial f}{\partial y}$

c. $2 \frac{\partial f}{\partial x} + 4u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 8ut \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

d. $-2 \frac{\partial f}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 8ut \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

e. $r = \sqrt{12}$

3) $4x + 4y - z - 2 = 0$

4)

a. $(12, -1)$

b. $12x - y - z - 12 = 0$

5)

a. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

b. $-\frac{1}{2}$