www.estudar.com.vc

# P1 2017 Poli USP Resolução

## Exercício 2 Continuidade, Função Composta e Diferenciabilidade

Explicação

**2. Sejam $f$ e $g$ funções reais a valores reais. Considere as seguintes afirmações:**

- **I.** **Se $f$ é contínua em $x_0 \in dom\, f$, então $f$ é derivável em $x_0$.**
- **II.** **Suponha $f$ inversível com inversa $g$, $f$ derivável em $x_0 \in dom\, f$, $g$ contínua em $f(x_0)$ e $f'(x_0) \neq 0$. Então $g$ é derivável em $f(x_0)$.**
- **III.** **Se $f$ e $g$ forem ambas descontínuas em $x_0 \in dom\, f \cap dom\, g$, então $f + g$ é descontínua em $x_0$.**

**São verdadeiras:**

**a. apenas a afirmação I.**
**b. apenas a afirmação II.**
**c. apenas afirmação III.**
**d. todas as afirmações.**
**e. apenas as afirmações II e III.**

Para resolver exercícios assim, tal qual no exercício 1, precisamos **achar contra-exemplos** para as afirmações ou **provar que são verdadeiras**.

Pela teoria ensinada nesse curso, sabemos que toda função derivável é contínua. Entretanto, a volta dessa afirmação não é verdadeira, ou seja, nem toda função contínua é derivável.

Logo, a **afirmação I** é **falsa** e um contra-exemplo é

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Essa função é contínua para todos os pontos em seu domínio. Entretanto, ela não é derivável para todos eles, porque, utilizando a definição formal de limite, para $x_0 = 0$:

$$f^{'}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

E assim, como o valor tende a infinito, dizemos que a função não é derivável nesse ponto.

Agora, considerando a **afirmação II**, sabemos, pela teoria das aulas anteriores, que

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'\big(f(x_0)\big)}$$

ou seja, caso $f'(x_0)$ exista e seja diferente de zero, a derivada de uma função inversível $f(x)$, no ponto $x_0$, é igual ao inverso da derivada de sua função inversa, $g(x)$, no ponto $f(x_0)$.

Como a afirmação nos garante que $f'(x_0)$ existe, porque a função é derivável nesse ponto, e que $f'(x_0) \neq 0$, podemos afirmar que essa igualdade é verdadeira.

Então, $g'\big(f(x_0)\big)$ existe, ou seja, $g$ é derivável no ponto $f(x_0)$ e, além disso, $g'\big(f(x_0)\big) \neq 0$.

Portanto, a **afirmação II** é **verdadeira**.

Para analisar a **afirmação III**, suponha duas funções, $f$ e $g$ da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Ambas as funções são **descontínuas** em $x_0 = 0$. Como esse ponto está contido no domínio de ambas as funções, então ele satisfaz o que é dito na **afirmação III**:

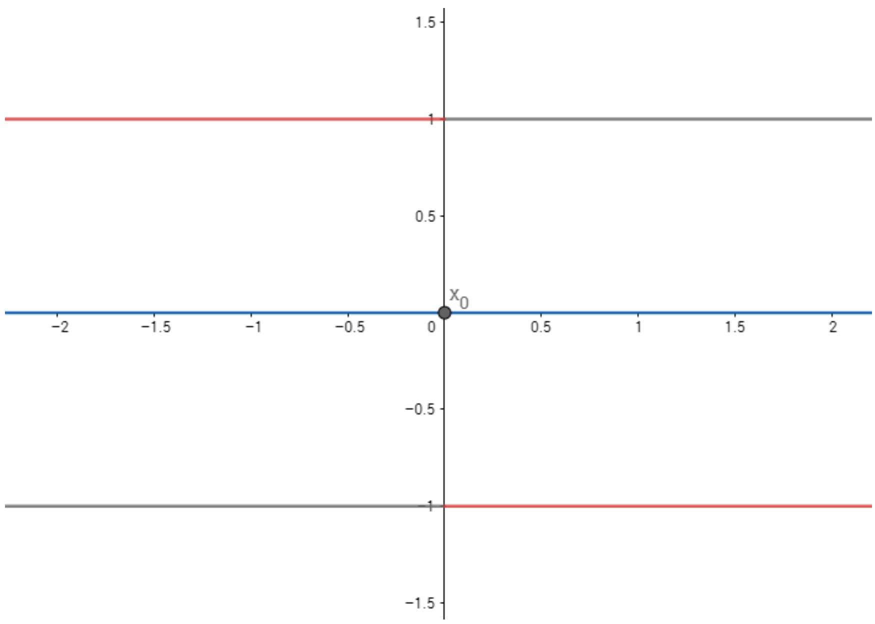
$$x_0 \in dom\ f \cap dom\ g.$$

Entretanto, ao fazer $f + g$ obtemos:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 1 - 1, & x < 0 \\ -1 + 1, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} = 0, \forall\ x \in dom\ f \cap dom\ g$$

Portanto, a função $f + g$ será constante e igual a zero e, assim, contínua em $x_0 = 0$. É mais fácil visualizar isso pela forma gráfica das funções.

Observe-as abaixo:




Como podemos ver, as funções $f$ e $g$ são descontínuas em $x_0 = 0$. Entretanto, sua soma, $f + g$, é a função constante $(f + g)(x) = 0$.

Logo, a **afirmação III** é **falsa**.

**Resposta esperada: alternativa B.**