www.estudar.com.vc

P1 2017 Poli USP
Resolução
Exercício 3 Diferenciabilidade
Explicação

3. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 5, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}}$$

Para que f seja derivável em 1, a e b devem ser, respectivamente:

a. 5 e 3.
b. 2 e 3.
c. 5 e qualquer b real.
d. 4 e 3.
e. para nenhum valor de a e b.

Pelo que vimos na teoria, sabemos que para uma função f, dada em chaves, **ser derivável** em um ponto $\boldsymbol{x_0}$, na **intersecção** das funções da chave, é necessário que ela seja **contínua** nesse ponto e que a **derivada de ambas as funções** seja igual nesse ponto.

Isso é necessário para 'evitar quinas' e garantir que a derivada existe nesse ponto, pois, será **igual** tanto se aproximando pela primeira função da chave quanto se aproximando pela segunda.

Portanto, vamos começar checando quando essa função é contínua nesse ponto. Para ela ser contínua, precisamos que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

E calculando esse limite para a função dada, temos:

$$\lim_{x \to 1} ax + b = a + b = f(1) = 1^3 + 1 + 5 = 7$$

Portanto, a função é **contínua** no ponto $\boldsymbol{x_0 = 1}$ somente quando a soma $a + b$ vale 7.

Isso nos deixa com somente duas alternativas possíveis, **d** ou **e**. Para concluirmos, precisamos calcular a derivada para ambas as funções da chave.

Vamos assumir que:

$$g(x) = x^3 + x + 5$$

$$h(x) = ax + b$$

Precisamos que $g'(1)$ seja igual a $h'(1)$. Como,

$$g'(x) = 3x^2 + 1$$

$$h'(x) = a$$

Temos que:

$$g'(1) = 3 + 1 = 4 = h'(1) = a$$

Portanto, concluímos que

$$\boldsymbol{a = 4}$$
$$\boldsymbol{b = 7 - a = 3}$$

Resposta esperada: D.