



www.estudar.com.br

P1 2017 Poli USP
Resolução
Exercício 6 Regra da Cadeia
Explicação





6. Um piloto se movimenta ao longo de uma reta real segundo a função horária $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \frac{f(t^4)}{2f(t^4)^2 + 1}$, com $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável e unidades no sistema MKS. Supondo $f(1) = f'(1) = 1$, calcule a velocidade do piloto no instante $t = 1$.

De acordo com o que já aprendemos, a **velocidade** é a **derivada temporal** de uma **função horária de posição**, ou seja, $\frac{dg}{dt}$.

Então, para solucionar essa questão precisamos derivar a função g em função do tempo, fazendo uso das **regras da derivada da razão e da cadeia**.

Primeiramente, vamos derivar temporalmente a expressão nos dois lados da igualdade. Assim, temos que:

$$g'(t) = \left(\frac{f(t^4)}{2f(t^4)^2 + 1} \right)'$$

Para derivarmos a equação, vamos começar fazendo uso da **regra da derivada da razão**:

$$\left(\frac{f(t^4)}{2f(t^4)^2 + 1} \right)' = \frac{(f(t^4))' \cdot (2f(t^4)^2 + 1) - (2f(t^4)^2 + 1)' \cdot (f(t^4))}{(2f(t^4)^2 + 1)^2}$$

Vamos fazer essa conta por partes. Vamos começar fazendo as derivadas necessárias fora da equação. Sabemos, pela regra da cadeia, que:

$$(f(h(t)))' = f'(h(t)) \cdot h'(t)$$

Portanto,



$$(f(t^4))' = f'(t^4) \cdot (t^4)' = f'(t^4) \cdot 4t^3$$

$$(2f(t^4)^2 + 1)' = 4f(t^4) \cdot (f(t^4))' = 4f(t^4) \cdot f'(t^4) \cdot (t^4)' = 4f(t^4)f'(t^4)4t^3$$

Assim, temos que:

$$g'(t) = \frac{f'(t^4) \cdot 4t^3 \cdot (2f(t^4)^2 + 1) - 4f(t^4)f'(t^4)4t^3 \cdot (f(t^4))}{(2f(t^4)^2 + 1)^2}$$

Como queremos a **velocidade** para o instante $t = 1s$, podemos **substituir** esse valor na equação e teremos:

$$g'(1) = \frac{f'(1^4) \cdot 4 \cdot 1^3 \cdot (2f(1^4)^2 + 1) - 4f(1^4)f'(1^4)4 \cdot 1^3 \cdot (f(1^4))}{(2f(1^4)^2 + 1)^2}$$

Como temos do enunciado que $f(1) = f'(1) = 1$, então:

$$g'(1) = \frac{1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot (2 + 1) - 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot (1)}{(2 + 1)^2} = -\frac{4}{9}$$

Resposta esperada: $-\frac{4}{9}$.