P1 2016 Poli USP Resolução

Exercício 5 Limites e Diferenciabilidade

Explicação

5. Considere as seguintes afirmações:

I. **Se g é limitada e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ então $\lim\limits_{x\to+\infty} |g(x)f(x)| = \infty$.**

II. **Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ então f é derivável.**

III. **Se $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é descontínua em x_0 e limitada, então**

$$f(x) = xg(x)sin(x)$$

é derivável em $x_0 = 0$.

São corretas

<u>Escolha uma alternativa:</u>

- **a. nenhuma das afirmações**
- **b. todas as afirmações**
- **c. somente as afirmações (I) e (II)**
- **d. somente as afirmações (I) e (III)**
- **e. somente as afirmações (II) e (III)**

Para resolver exercícios desse tipo, precisamos achar **contra-exemplos** para as afirmações ou **provar que são verdadeiras**.

Vamos começar com a **afirmação I**.

Vamos pensar nas funções mais simples possíveis que satisfazem o que está contido na premissa da afirmação. Suponha:

$$f(x) = x$$

$$g(x) = sin(y)$$

Nesse caso, y será uma função de x que descobriremos depois para ver se a afirmação está incorreta. Assim, o limite ficará:

$$\lim_{x \to +\infty} |x \cdot sin(y)|$$

Já sabemos, devido às aulas de teoria, do **limite trigonométrico fundamental**.

Para poder utilizá-lo, precisamos que a incógnita esteja tendendo a zero no limite. Portanto, faremos uma mudança de variável para satisfazer essa premissa. Usando:

$$u = \frac{1}{x}$$

Temos,

$$\lim_{x \to +\infty} |x \cdot sin(y)| = \lim_{u \to 0} \left| \frac{sin(y_1)}{u} \right|$$

Onde y_1 é a função y, só que em função de u agora.

Temos que esse limite encontrado será igual ao trigonométrico fundamental se

$$y_1 = u$$

E, portanto,

$$y = \frac{1}{x}$$

Então, podemos concluir que, caso

$$f(x) = x$$

$$g(x) = sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Teremos que

$$\lim_{x \to +\infty} \left| x \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = \lim_{u \to 0} \left| \frac{sin(u)}{u} \right| = 1$$

Essas funções são **contra-exemplos** da afirmação **I** e, portanto, podemos afirmar que ela é **falsa**.

Agora, vamos checar a **afirmação II**:

Se f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ então f é derivável

Essa desigualdade lembra muito a **definição formal de derivada.**

Vamos passar um dos módulos de $x - y$ dividindo para o outro lado da igualdade – percebam que podemos fazer isso **somente porque** temos certeza que é um valor positivo, uma vez que está em módulo:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq |x - y|$$

Como visto na teoria de funções modulares, sabemos que a **divisão de dois módulos** é o **módulo da divisão**.

Podemos, agora, fazer o limite quando x tende a y dos dois lados da desigualdade para fazer surgir a definição formal de limite. Assim,

$$|f'(y)| = \left| \lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \left| \lim_{x \to y} x - y \right|$$

Calculando o limite do lado direito da desigualdade, teremos

$$\boldsymbol{\lim_{x \to y} x - y = 0}$$

Logo, chegamos na desigualdade

$$|f'(y)| \leq 0$$

Como uma função modular é necessariamente maior ou igual a zero, e, a desigualdade prova que a derivada de f no ponto y é menor ou igual a zero, podemos afirmar que

$$f'(y) = 0$$

Assim, provamos que f é derivável e, portanto, a afirmação **II** é **verdadeira.**

Partiremos agora para a análise da **afirmação III**:

Se $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é descontínua em x_0 e limitada, então $f(x) = xg(x)sin(x)$ é derivável em $x_0 = 0$.

Vamos verificar se a função f é derivável em $x_0 = 0$ utilizando a **definição formal de derivada**:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{xg(x)sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} g(x)sin(x)$$

f será derivável em $x_0 = 0$ se esse limite existir e for finito. Podemos, para solucionar esse limite, utilizar o **limite trigonométrico fundamental**, multiplicando por x tanto o numerador quanto o denominador. Assim:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)sin(x)}{1} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} g(x) \cdot x \cdot \underbrace{\frac{sin(x)}{x}}_{= 1}$$

Assim, ficamos com

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} g(x) \cdot x$$

Pelo enunciado, sabemos que g é uma função **limitada**. Como nessa situação, x tende a 0, podemos utilizar o **Teorema do Confronto** aprendido na teoria.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} g(x) \cdot x = 0$$

Como $f'(0) = 0$, podemos afirmar que ela é derivável em $x_0 = 0$.

Portanto, a afirmação **III** é **verdadeira**.

Resposta esperada: E.