www.estudar.com.vc

P1 2016 Poli USP Resolução

Exercício 7 Continuidade

Explicação

7. Considere a função

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{x^3 \, sin \frac{1}{|x|}}}{\boldsymbol{|x|}}, & x \neq 0 \\ \boldsymbol{0}, & x = 0 \end{cases}$$

Em $x_0 = 0$, pode-se afirmar que f é:

- **a. descontínua**
- **b. derivável e $f'(0) = 1$**
- **c. contínua, mas não derivável**
- **d. derivável e $f'(0) = 0$**
- **e. derivável e $f'(0) = -1$**

Para solucionar essa questão, precisamos primeiramente verificar se a função é **contínua** se for, descobrir se a função é **derivável**.

Vamos começar averiguando a **continuidade** da função. Em $x_0 = 0$, precisamos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \, sin \frac{1}{|x|}}{|x|} = 0$$

Para calcular esse limite, vamos **multiplicar** tanto o numerador quanto o denominador da função **por módulo de x**:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \, sin \frac{1}{|x|}}{|x|} \cdot \frac{|x|}{|x|} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 |x| \, sin \frac{1}{|x|}}{|x|^2}$$

De acordo com a teoria aprendida, o módulo de x ao quadrado é igual a x ao quadrado, uma vez que ao elevar um número ao quadrado ele necessariamente é positivo.

Cortando o módulo de x ao quadrado do denominador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3|x|\,sin\frac{1}{|x|}}{|x|^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3|x|\,sin\frac{1}{|x|}}{x^2}=\lim_{x\to 0}x|x|\,sin\frac{1}{|x|}$$

Ficamos com uma função sem **indeterminações** mas para resolver esse limite, precisamos usar o **Teorema do Confronto.**

Uma função que tende a zero multiplicada por uma função limitada, como uma função trigonométrica, tende a zero. Então:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\,sin\frac{1}{|x|}}{|x|}=\lim_{x\to 0}x|x|\,sin\frac{1}{|x|}=0$$

Concluímos que a função **é contínua** em $x_0=0$.

Agora, vamos verificar se ela é derivável. Para isso, usaremos a **definição formal de derivada**.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\,sin\frac{1}{|x|}}{x|x|}$$

Do enunciado, que $\boldsymbol{f(0)=0}$. Agora, procedendo de maneira similar, que para resolver o limite da continuidade, podemos concluir que:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{x^3\,sin\frac{1}{|x|}}{x|x|}=\lim_{x\to 0}|x|\,sin\frac{1}{|x|}}$$

Temos novamente uma função que tende a **zero** multiplicada por uma função **limitada**. Portanto, esse limite **também tenderá a zero**.

Logo:

$$f'(0) = 0$$

Resposta esperada: D.