www.estudar.com.vc

P1 2016 Poli USP
Resolução
Exercício 8 Diferenciabilidade
Parte 2
Explicação

8. Seja $f(x) = sin\sqrt[3]{x^3 + x^2}\, sin\, \sqrt[3]{x}$. Determine os pontos em que f não é derivável. Nos demais, calcule $f'(x)$.

Nessa parte, iremos descobrir se f é derivável em $x = 0$. Como não podemos calcular $f'(0)$ por meio das regras conhecidas, precisaremos usar a **definição formal de derivada**:

$$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Assim, precisamos obter o valor da derivada quando x tende a 0, então, como:

$$\boldsymbol{f(0) = sin\, \sqrt[3]{0} \cdot sin\, \sqrt[3]{0} = 0}$$

E então temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{sin\sqrt[3]{x^3 + x^2}\, sin\, \sqrt[3]{x}}{x}$$

E agora, só precisamos calcular esse limite. Como temos funções seno no limite, vamos tentar fazer surgir o **limite trigonométrico fundamental**.

Para isso, vamos multiplicar tanto o numerador quanto o denominador pelo valor dentro de um dos senos, primeiro:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin\sqrt[3]{x^3 + x^2}\, sin\, \sqrt[3]{x}}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{sin\sqrt[3]{x^3 + x^2}}{x} \cdot \underbrace{\frac{sin\, \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}}_{= 1} \cdot \sqrt[3]{x}$$

Agora, usaremos do mesmo procedimento só que para o outro seno:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^3+x^2}}{\sqrt[3]{x^3+x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+x^2} \cdot \sqrt[3]{x}}{x} \cdot \underbrace{\frac{sin\sqrt[3]{x^3+x^2}}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}}_{=1}$$

Assim, ficaremos com o limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+x^2} \cdot \sqrt[3]{x}}{x}$$

Multiplicando as raízes cúbicas e fatorando x^3, obteremos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3(x+1)}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sqrt[3]{(x+1)}}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{(x+1)}$$

Agora, não possuímos mais indeterminações e podemos calcular o limite simplesmente substituindo x por 0 no limite.

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{(x+1)} = \sqrt[3]{(0+1)} = \sqrt[3]{1} = 1$$

Logo, $\boldsymbol{f'(0) = 1}$.

Resultado esperado: A função é derivável em $\boldsymbol{x = 0}$ e $\boldsymbol{f'(0) = 1}$.