www.estudar.com.vc

# P1 2016 Poli USP Resolução

## Exercício 8 Diferenciabilidade Parte 3

Explicação

**8. Seja $f(x) = sin\sqrt[3]{x^3 + x^2}\, sin\sqrt[3]{x}$. Determine os pontos em que $f$ não é derivável. Nos demais, calcule $f'(x)$.**

Nessa parte, iremos descobrir se $f$ é derivável em $x = -1$. Como anteriormente, precisaremos usar a **definição formal de derivada**:

$$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Então, como $f(-1) = 0$, temos:

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{sin\sqrt[3]{x^3 + x^2}\, sin\sqrt[3]{x}}{x + 1}$$

Nessa função, temos um seno que, quando $x$ tende a $-1$, seu valor tende a zero. Fazendo uma mudança de variável, podemos utilizar o **limite trigonométrico fundamental**:

$$u = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$$

Quando $x$ tende a $-1$, $u$ tende a zero. Portanto,

$$\lim_{x \to -1} sin\sqrt[3]{x^3 + x^2} = \lim_{u \to 0} sin\, u \cdot \frac{u}{u} = \lim_{u \to 0} u \cdot \underbrace{\frac{sin\, u}{u}}_{= 1} = \lim_{u \to 0} u = \lim_{x \to -1} \sqrt[3]{x^3 + x^2}$$

Substituindo no limite original, temos

$$\lim_{x \to -1} \frac{sin\sqrt[3]{x^3 + x^2}\, sin\sqrt[3]{x}}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2}\, sin\sqrt[3]{x}}{x + 1}$$

Para facilitar, passamos o denominador para dentro da raiz e fatoramos a raiz do numerador:

$$\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt[3]{x^3+x^2}\, sin\, \sqrt[3]{x}}{x+1} = \lim_{x\to-1} \sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{(x+1)^3}} \cdot sin\, \sqrt[3]{x} = \lim_{x\to-1} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \cdot sin\, \sqrt[3]{x}$$

Ao cancelar os fatores repetidos, a **indeterminação** do numerador estará **eliminada** e poderemos, até que enfim, calcular o limite.

Separando o limite do numerador e do denominador:

$$\lim_{x\to-1} \sqrt[3]{x^2} \cdot sin\, \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(-1)^2} \cdot sin\, \sqrt[3]{(-1)} = sin\, -1$$

$$\lim_{x\to-1} \sqrt[3]{(x+1)^2} = \sqrt[3]{(-1+1)^2} = 0$$

Vemos que o numerador é um número e o denominador tende a zero, portanto, esse limite tenderá ao infinito.

Precisamos somente determinar se será para $+\infty$ ou para $-\infty$.

Sabemos que

$$\mathbf{0 > -1 > -\frac{\pi}{2}}$$

Como o seno desse valor está contido no **quarto quadrante** do **ciclo trigonométrico**, o numerador será um número **negativo**.

Já em relação ao numerador, como ele está elevado ao quadrado, ele sempre tenderá a um número **positivo**.

Temos uma divisão de um número negativo por outro positivo, que resulta em um número **negativo** e, portanto:

$$\lim_{x \to -1} \frac{sin \sqrt[3]{x^3 + x^2}\, sin \sqrt[3]{x}}{x + 1} = -\infty$$

Por fim mostramos que a função **não é derivável** para $x = -1$ .

**Resposta esperada: No ponto $x = -1$, a função não é derivável.**