www.estudar.com.vc

P1 2015 Poli USP Resolução

Exercício 2 Diferenciabilidade Parte 1 Regra do Produto e da Cadeia

Explicação

2. Seja $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\, sin\, \sqrt[3]{x^2-4}$. Determine os pontos nos quais f é derivável e calcule a derivada de f nesses pontos.

Para descobrir o valor dessa derivada, precisamos derivar fazendo uso das **regras do produto e da cadeia.**

Após isso, precisamos checar se a derivada em todos os pontos é derivável dessa forma, ou seja, se não resultará em uma divisão por zero.

Se resultar, não poderemos obter a derivada da função nesse ponto dessa forma, teremos que tentar calcular a derivada **pela definição** e definir se a função é derivável ou não nesse ponto.

Vamos começar fazendo a regra do produto:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\, sin\, \sqrt[3]{x^2-4}\right)' =$$

$$= \left(\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\right)' \cdot sin\, \sqrt[3]{x^2-4} + \sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\left(sin\, \sqrt[3]{x^2-4}\right)'$$

Utilizando a regra da cadeia em ambos os termos:

$$\left(\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\right)' = \frac{\left((x-2)^2(x+2)\right)'}{3\sqrt[3]{\left((x-2)^2(x+2)\right)^2}} =$$

$$= \frac{(x-2)^{2'}(x+2) + (x-2)^2(x+2)'}{3\sqrt[3]{\left((x-2)^2(x+2)\right)^2}} =$$

$$= \frac{2(x-2)(x+2)+(x-2)^2}{3\sqrt[3]{\left((x-2)^2(x+2)\right)^2}}$$

$$\left(sin\sqrt[3]{x^2-4}\right)' = cos\sqrt[3]{x^2-4}\cdot\left(\sqrt[3]{x^2-4}\right)' = \frac{cos\sqrt[3]{x^2-4}\cdot(x^2-4)'}{3\sqrt[3]{x^2-4}} =$$

$$= \frac{2x\cdot cos\sqrt[3]{x^2-4}}{3\sqrt[3]{x^2-4}}$$

A derivada é:

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)+(x-2)^2}{3\sqrt[3]{\left((x-2)^2(x+2)\right)^2}}\cdot sin\sqrt[3]{x} + \frac{2x\cdot cos\sqrt[3]{x^2-4}}{3\sqrt[3]{x^2-4}}\cdot sin\sqrt[3]{(x^3+x^2)}$$

Ela **não poderá** ser calculada dessa forma se houver uma **divisão por zero** em alguma de suas parcelas. Então, precisamos que:

$$\sqrt[3]{\left((x-2)^2(x+2)\right)^2} \neq 0 \text{ e } \sqrt[3]{x^2-4} \neq 0$$

Logo:

$$x \neq 2 \text{ e } x \neq -2 \text{ , } x \neq 2 \text{ e } x \neq -2$$

Dessa forma, podemos calcular $f'(x)$ por meio das regras conhecidas em todos os pontos do domínio (reais), **exceto** em $\boldsymbol{x = 2}$ e $\boldsymbol{x = -2}$.

Para determinar se a função é derivável nesses pontos, usamos a **definição formal** de derivada. Veja em detalhes na parte 2 desta resolução.

Resposta esperada: a continuar na parte 2 desta resolução.