www.estudar.com.vc

P1 2015 Poli USP
Resolução
Exercício 2 Diferenciabilidade
Parte 2 Definição de Derivada

Explicação

2. Seja $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\, sin\, \sqrt[3]{x^2-4}$. Determine os pontos nos quais f é derivável e calcule a derivada de f nesses pontos.

Nessa parte, iremos descobrir se f é derivável em $x = 2$. Como não podemos calcular $f'(2)$ por meio das regras conhecidas, precisaremos usar a **definição formal de derivada**:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Quando x tende a 2:

$$f(2) = \sqrt[3]{(2-2)^2(2+2)} \cdot sin\, \sqrt[3]{4-4} = 0 \cdot sin\, 0 = 0$$

Então, na definição formal:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\, sin\, \sqrt[3]{x^2-4}}{x-2}$$

Para calcular esse limite, vamos tentar fazer surgir o **limite trigonométrico fundamental** multiplicando tanto o numerador quanto o denominador pelo **valor dentro do seno**:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\, sin\, \sqrt[3]{x^2-4}}{x-2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{\sqrt[3]{x^2-4}} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)} \cdot \sqrt[3]{x^2-4}}{x-2} \cdot \frac{sin\, \sqrt[3]{x^2-4}}{\sqrt[3]{x^2-4}}$$

Ficamos com o limite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\cdot\sqrt[3]{x^2-4}}{x-2}$$

Multiplicando as raízes cúbicas e colocando o denominador dentro da raiz cúbica, obteremos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\cdot\sqrt[3]{x^2-4}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2(x+2)(x^2-4)}{(x-2)^3}}$$

Podemos usar a propriedade da **diferença de dois quadrados** em um dos fatores do denominador. De acordo com essa propriedade, temos

$$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$$

Aplicando ela no limite, temos

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2(x+2)(x^2-4)}{(x-2)^3}}=\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2(x+2)(x-2)(x+2)}{(x-2)^3}}$$

Cortando todos os fatores $x-2$ presentes tanto no numerador quanto no denominador, eliminamos a indeterminação:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{(x-2)^3(x+2)^2}{(x-2)^3}}=\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{(x+2)^2}=\sqrt[3]{(2+2)^2}=\sqrt[3]{\mathbf{16}}$$

Resultado esperado: A função é derivável em $x = 2$ e $f'(2) = \sqrt[3]{16}$. A resolução continua na parte 3 a seguir.