P1 2015 Poli USP Adaptada

Exercício 2 Diferenciabilidade

Parte 3 Derivada no ponto

Explicação

2. Seja $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\, sin\, \sqrt[3]{x^2-4}$. Determine os pontos nos quais f é derivável e calcule a derivada de f nesses pontos.

Agora nessa parte, iremos descobrir se f é derivável em $x=-2$. Como não podemos calcular $f'(-2)$ por meio das regras conhecidas, precisaremos usar novamente a **definição formal de derivada**:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Como $f(-2)=0$, temos:

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\, sin\, \sqrt[3]{x^2-4}}{x+2}$$

Nessa função, temos um seno que, quando x tende a -2, seu valor tende a zero. Portanto, fazendo uma mudança de variável, podemos utilizar o **limite trigonométrico fundamental**. Considerando

$$u=\sqrt[3]{x^2-4}$$

Temos que, quando x tende a -2, u tende a zero. Portanto,

$$\lim_{x\to -2} sin\sqrt[3]{x^2-4}=\lim_{u\to 0} sin\, u\cdot\frac{u}{u}=\lim_{u\to 0} u\cdot\underbrace{\frac{sin\, u}{u}}_{=1}=\lim_{u\to 0} u=\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{x^2-4}$$

Portanto, substituindo no limite original, temos:

$$\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\, sin\, \sqrt[3]{x^2-4}}{x+2} = \lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)} \cdot \sqrt[3]{x^2-4}}{x+2}$$

Agora, podemos passar o denominador para dentro da raiz e **também** fatorar a raiz do numerador para facilitar. Veja:

$$\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)} \cdot \sqrt[3]{x^2-4}}{x+2} = \lim_{x\to-2} \sqrt[3]{\frac{(x-2)^3(x+2)^2}{(x+2)^3}} =$$

$$= \lim_{x\to-2} \sqrt[3]{\frac{(x-2)^3}{(x+2)}}$$

Eliminamos a indeterminação do numerador e temos que o **denominador** ainda tende a **zero**.

Portanto, sabemos que, caso esse limite exista, ele tenderá a um valor infinito. Para descobrir se ele existe e, se existir, se tende a $+\infty$ ou a $-\infty$, devemos analisar os **limites laterais**.

Quando x tende a -2^+, ou seja, $x > -2$, temos que o denominador tenderá a um valor **positivo**, porque teremos $x + 2 > 0$.

Além disso, sabemos que o numerador irá tender a um valor **negativo**. Portanto, essa razão tenderá a um valor **negativo**. Logo,

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-2^+} \sqrt[3]{\frac{(x-2)^3}{(x+2)}} = -\infty}$$

Da mesma forma, quando x tende a -2^-, ou seja, $x < -2$, temos que o denominador tenderá a um valor **negativo**, porque teremos $x + 2 < 0$.

Além disso, sabemos que o numerador irá tender a um valor **negativo**. Portanto, essa razão tenderá a um valor **positivo**. Logo,

$$\lim_{x \to -2^-} \sqrt[3]{\frac{(x-2)^3}{(x+2)}} = +\infty$$

Como os limites laterais tendem a valores distintos, podemos afirmar que o limite dessa função quando x tende a -2 **não existe.**

Resposta esperada: f é derivável em $x = 2$ e $f'(2) = \sqrt[3]{16}$. A função f não é derivável no ponto $x = -2$.