www.estudar.com.vc

ANPEC

Prova de Matemática

Exame de 2017

Exercícios

1. Considere o seguinte conjunto: $C = \{(x, y): x^2 - 2x - 1 \leq y \leq \min\{x + 17, -x + 19\}\}$. Analise a veracidade das seguintes afirmações:

A. O valor máximo da coordenada horizontal de C é 19;
B. O valor mínimo da coordenada horizontal de C é -3;
C. O valor máximo da coordenada vertical de C é 15;
D. O valor mínimo da coordenada vertical de C é -2;
E. A interseção de C com o eixo vertical determina um segmento de comprimento 18.

2. Uma matriz $M \in R^{nxn}$ é chamada idempotente se $M^2 = M$. Uma matriz $N \in R^{nxn}$ é chamada nilpotente se existe um número inteiro positivo k tal que $N^k = 0$ (matriz com todas as entradas nulas). Classifique as seguintes afirmações segundo a sua veracidade:

A. O determinante de uma matriz nilpotente é zero;
B. Se $M \in R^{nxn}$ é nilpotente, então existe um número inteiro r tal que $(I - M)^{-1} = I + M + \cdots + M^r$;
C. A soma de matrizes nilpotentes é uma matriz nilpotente;
D. O determinante de uma matriz idempotente é sempre 1;
E. A matriz $M \in R^{nxn}$ é idempotente se, e somente se, $(I - M)$ é idempotente.

3. Considere a seguinte equação em diferenças: $y_{t+3} - y_{t+2} - y_{t+1} - 2y_t = 3t - 3$. Se temos as seguintes condições iniciais: $y_0 = 3$, $y_1 = 2$ e $y_2 = -5$, classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

A. A solução da equação homogênea associada é explosiva;
B. A solução particular é uma função quadrática em t;
C. Em $t = 30$ temos que $y_{30} = -27$;
D. A solução da equação homogênea associada é uma combinação linear de potências de números reais que têm valores absolutos maiores ou menores que 1;
E. A solução é oscilante entorno de uma função linear.

4. Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

A. Seja $T: R^n \to R^n$ uma transformação linear. Se T é injetora, então T também é sobrejetora.
B. Seja $T: R^2 \to R^2$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (2x - 5y, x - 2y)$. Então existe um subespaço unidimensional V de R^2 tal que $TV \subset V$;
C. Seja $T: R^n \to R^m$ uma transformação linear tal que as colunas da matriz que a representa são linearmente independentes. Então o posto de T é m;
D. Sob as mesmas condições do item anterior, podemos afirmar que existe um vetor $v \neq 0$ tal que $Tv = 0$;
E. Sejam $T: R^n \to R^n$ e $G: R^n \to R^n$ duas transformações lineares. Então todo autovalor de TG é também um autovalor de GT, em que TG e GT são as duas compostas das transformações T e G.

5. Considere o conjunto $C = \{(x, y) \in\ R^2; 2x - y + 2 \geq 0, x^2 + 2x + y - 2 \leq 0, x^2 - 2x - 4y - 3 \leq 0\}$. O objetivo é maximizar a função $f(x, y) =\ ax + by$, em que a, b ∈ R, $(a, b) \neq (0,0)$ no conjunto C. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas?

A. O conjunto C contém $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$;
B. Se $a = 3$ e $b = 1$, então a solução é $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$;
C. Para qualquer $(a, b) \neq (0,0)$, a solução está na fronteira de C;
D. Se $a = -1$ e $b = -2$, então a solução é $(0, -\frac{3}{4})$;
E. Se $a = -2$ e $b = 1$, então o valor máximo de f(x,y) em C é 3.

6. Considere o sistema em $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} =\ -10y -\ x^3 - x^5$.
Encontre $\frac{1}{-y^2}\frac{d}{dt}F\big(x(t), y(t)\big)$, em que x(t),y(t) é a solução do sistema acima e $F(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}$.

7. Considere a seguinte função: $f(x) =\ 12x^5 - 15x^4 - 220x^3 + 270x^2 + 1080x - 56$. Analise o valor de verdade das seguintes afirmações:

A. $x = -3$ é um máximo relativo;
B. Para $x \geq 3$ a função f é côncava;
C. Existem três pontos de inflexão;
D. Quando $x \to +\infty$, o valor de $f(x) \to -\infty$;
E. No intervalo [-3,2] existe um mínimo absoluto interior.

8. Dada a função: $f(x,y) = x^2 \ln y + y^3 e^x + 3x + 2y$, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas?

A. No ponto $(x,y) = (1,1)$ a direção $(-3,1)$ é uma direção de crescimento da função f;
B. No ponto $(x,y) = (0,1)$ a direção $(4,5)$ é a direção de máximo de incremento da função f;
C. A função f tem um máximo relativo interior no seu domínio;
D. Ao longo do eixo vertical (quando $x = 0$) a direção horizontal à direita (ou seja, $(1,0)$) é a direção de máximo incremento de f;
E. Em todo ponto do domínio a função f é crescente em ambas variáveis.

9. Um contrato financeiro especifica a seguinte aplicação de taxas de juros. Durante os t_1 primeiros meses (primeiro período) deve se pagar uma taxa de juros simples de r_1 ao mês (ou seja, $100r_1\%$ ao mês). Durante os t_2 meses seguintes (segundo período) deve se pagar uma taxa de juros composta de r_2 ao mês (com capitalização mensal). Finalmente, durante os últimos t_3 meses (terceiro período) deve se pagar uma taxa de juros de capitalização contínua de r_3 ao mês. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas?

A. A taxa de juros nos dois primeiros períodos é $(1 + t_1 r_1)(1 + r_2)^{t_2} - 1$;
B. Se no primeiro período colocarmos uma taxa de juros mensal de capitalização contínua equivalente, o seu valor será $(1 + t_1 r_1)^{\frac{1}{t_1}} - 1$;
C. Se no terceiro período colocarmos uma taxa de juros simples mensal equivalente, o seu valor será ${t_3}^{-1} e^{t_3 r_3}$;
D. A taxa de juros desse contrato para os três períodos é $t_1 r_1 + {r_2}^{t_2} + e^{t_3 r_3}$;
E. A taxa de juros mensal com capitalização contínua equivalente para todos os três períodos é $(t_1 + t_2 + t_3)^{-1}[t_3 r_3 + t_2 \ln(1 + r_2) + \ln(1 + t_1 r_1)]$.

10. Uma bactéria está disseminando-se rapidamente, de maneira que a velocidade de propagação segue a equação $\dot{p} = Ap(1-p)$, em que $p = p(t) \in [0,1]$ é a percentagem da população contaminada após $t \geq 0$ dias, $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$ e $A > 0$ é uma constante. Analisar a veracidade das seguintes informações:

A. A função p é uma função logarítmica;
B. Se inicialmente havia 1% da população infectada e depois de 4 dias 10% da população mostrou-se contaminada, então $A = \frac{1}{4}\ln(11)$;
C. O tempo necessário para a bactéria duplicar a população inicialmente infectada é $A^{-1}\ln 2$;
D. Se inicialmente havia 10% de infectados, o instante da maior velocidade de propagação da bactéria é $2A^{-1}\ln 3$;
E. Existe um valor de $A > 0$ para o qual a máxima percentagem da população que resulta infectada é 50%.

11. Analise a veracidade das seguintes informações:

A. Para que as retas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sejam perpendiculares deve-se cumprir $a_1a_2 + b_1b_2 = 1$;
B. Para que as retas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ se interceptem em um único ponto deve-se cumprir $a_1b_2 \neq a_2b_1$;
C. Ao girar o vetor $(4{,}2\sqrt{3})$ de um ângulo de 60° em sentido anti-horário resulta o vetor $(3\sqrt{3}$,- 1);
D. A reta definida pelas equações $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ e $-x + 2y - 3z + 4 = 0$ é perpendicular ao plano dado por $-17x + 2y + 7z + 10 = 0$;
E. Para que a reta que passa por $(-1,-1)$ e tenha direção dada pelo vetor $(1, b)$ seja tangente à parábola $y = x^2$, o valor de b pode ser 0,82 ou $-4{,}82$ (usando apenas duas casas decimais).

12. No seguinte problema de maximização:

$$\max_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} (x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}})^a - x_1 - x_2.$$

É correto afirmar:

A. Se $a \in (0,1)$, a função objetivo desse problema é estritamente convexa;

B. Se $a = 1$, o valor máximo atingido no problema é $\frac{1}{2}$;

C. Se $a = 1{,}5$, $(x_1, x_2) = (\frac{9}{4}, \frac{9}{4})$ é ponto crítico da função objetivo do problema;

D. Se $a = 2$, o problema não tem solução;

E. Se $a = 3$, a solução do problema é $(x_1, x_2) = (36{,}36)$.

13. Analisar a veracidade das seguintes informações:

A. Se $f: B \to C$ e $g: A \to B$ são duas funções injetoras, então $(f \circ g)^{-1}$ definida em $D = \{z \in C: \exists x \in A \; tal \; que \; f\big(g(x)\big) = z\}$ é uma função sobrejetora;

B. Se $f: B \to C$ e $g: A \to B$ são duas funções tais que $f \circ g$ é bijetora, então g é sobrejetora e f é injetora;

C. Se $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ definida em $R - \{1\}$, então $f^{-1}(x) = f(x)$;

D. Se $f: B \to C$ é sobrejetora e $g: A \to B$ é injetora, então $f \circ g$ é sobrejetora;

E. Seja $f: [0,16] \to R$ definida por $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$. O valor máximo do contradomínio de $f^{(5)}(x)$ é 2, em que $f^{(5)}(x) = (f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x)$.

14. Sabendo que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$, defina

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 + (2y - x)^2 + 2y^2)} dx dy$$

Calcule $\frac{8\sqrt{2}}{\pi} I$.

15. Calcular o valor de a em que:

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}(n+2)}{n^2+n}$$

Gabarito

	A.	B.	C.	D.	E.
1.	F	V	F	V	V
2.	V	V	F	F	V
3.	V	F	V	F	V
4.	V	F	F	F	V
5.	F	V	V	V	F
6.	10				
7.	V	F	V	F	V
8.	F	V	F	F	F
9.	V	F	F	F	V
10.	F	V	F	V	F
11.	F	V	F	V	V
12.	F	V	F	V	F
13.	V	F	V	F	F
14.	4				
15.	1				

Bibliografia

ANPEC - Exame Nacional de Seleção 2017 – Prova de Matemática. Disponível em: <https://www.anpec.org.br/exame/portal/index.php?r=site/provasAnteriores>. *Acesso em: 12 de setembro de 2017.*