www.estudar.com.vc

Matemática da Variação

Prova 3

Resumo e Exercícios P3

Fórmulas e Resumo Teórico

Derivada

Soma e subtração: $[f \pm g]'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

Regra do Produto: $[f \cdot g]'(a) = f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)$

Regra do Quociente: $\left[\frac{f}{g}\right]'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - g'(a) \cdot f(a)}{g^2(a)}$

Regra da Cadeia: $\left[f\left(g(a)\right)\right]' = [f \circ g]'(a) = f'\left(g(a)\right) \cdot g'(a)$

Ponto Crítico: Reta tangente horizontal = derivada nula = $[f(x_c)]' = 0$

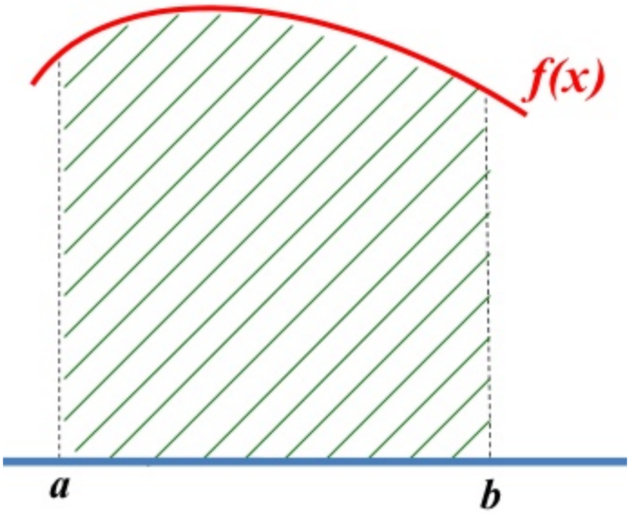
Integral

Primitiva: Inverso da derivada

Integral Indefinida: $\int [f(x)]' dx = f(x) + C$

Integral Definida: $\int_a^b [f(x)]' dx = [f(x)] \Big|_a^b$

Área sobre uma curva:



$\int_a^b f(x) = Área\ do\ Gráfico$

Equações Diferenciais

Equação diferencial por variáveis separáveis:

Quando tiver uma igualdade com equações diferenciais de varáveis diferentes não separadas:

$$f_1(x) \cdot g_1(y)dy = f_2(x) \cdot g_2(x)$$

É necessário separá-las em lados diferentes da igualdade:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx$$

Para podermos integrar em seguida, “eliminando as derivadas”:

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx$$

Equações diferenciais de segunda ordem homogêneas:

Onde:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Extrai-se a equação auxiliar:

$$ar^2 + br + c = 0$$

De raízes: r_1 e r_2

E:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para $\Delta > 0$ tem-se a solução geral:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Para $\Delta = 0$ tem-se a solução geral:

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

Para $\Delta < 0$ tem-se a solução geral:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 sen(\beta x)\right)$$

Onde:$r = \alpha \pm \beta i$

Equações diferenciais de segunda ordem não homogêneas

Onde:

$$ay'' + by' + c = f(x)$$

Tem como resposta geral:

$$y_G = y_c + y_p$$

Separa-se, sua parte homogênea, a equação complementar:

$$ay'' + by' + c = 0$$

Com resposta y_c.

E obtêm-se a resposta particular pelo método dos coeficientes a serem determinados.

$y_p = Ae^{nx}$, para $f(x)$ com Euler elevado a nx;

$y_p = Acos(x) + Bsen(x)$, para $f(x)$ com seno e/ou cosseno de x;

$y_p = Ax + B$, para $f(x)$ sendo um polinômio de primeiro grau;

$y_p = Ax^2 + Bx + C$, para $f(x)$ sendo um polinômio de segundo grau.

Exercícios de Fixação

1. Derivada

Prova 3

Dada a função $p(x)$ abaixo:

$$p(x) = \frac{2x+5}{\ln(2x+5)}$$

Obtenha o valor de x em que a reta tangente ao gráfico de p é horizontal.

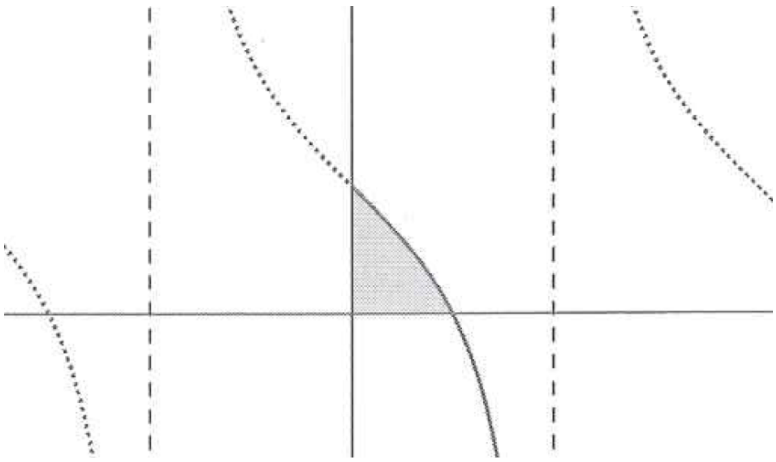
2. Integral e Equações Diferenciais

Prova 3

Considere todas as funções definidas no domínio $D = \left\{\frac{x\epsilon\mathbb{R}}{0} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$.

a. Prove que a função dada por $F(x) = -\ln(\cos x)$ é uma primitiva da função definida por $t(x) = tg(x)$.

b. Calcule a área da região sombreada na figura, em que está representada uma parte do gráfico da função $f(x)$, dada pela lei $f(x) = 1 - tg(x)$.



c. Resolva, para a condição inicial $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$, a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot tg(x)$$

3. Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Prova 3

O sistema massa mola com amortecimento sujeito a uma força externa $F(t)$, pode ser modelado pela equação diferencial:

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

Considere nesta questão o sistema acima para $m = 1kg$, $c = 2kg/s$, $k = 17kg/s^2$ e $F(t) = 32e^{-t}$, com t dado em segundos e $F(t)$ dado em Newtons.

a. Dê a solução geral da equação homogênea associada à equação dada no enunciado.

b. Encontre uma solução particular da equação.

c. Resolva a equação considerando as condições iniciais: $x(0) = -1m$ e $x'(0) = 5m/s$.

Gabarito

1. $x = \frac{e-5}{2}$

2.

a. $\frac{d(-\ln(\cos x)}{dx} = tg(x)$

b. $\frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $y = 2\cos x$

3.

a. $x(t) = e^{-t}(Acos4t + Bsen4t)$

b. $x_p = 2e^{-t}$

c. $x(t) = e^{-t}(-3cos4t + sen4t + 2)$