



[www.estudar.com.vc](http://www.estudar.com.vc)

# **Matemática da Variação**

## **Prova 3**

### Resumo e Exercícios P3





## Fórmulas e Resumo Teórico

### Derivada

Soma e subtração:  $[f \pm g]'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

Regra do Produto:  $[f \cdot g]'(a) = f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)$

Regra do Quociente:  $\left[\frac{f}{g}\right]'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - g'(a) \cdot f(a)}{g^2(a)}$

Regra da Cadeia:  $[f(g(a))]' = [f \circ g]'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Ponto Crítico: Reta tangente horizontal = derivada nula =  $[f(x_c)]' = 0$

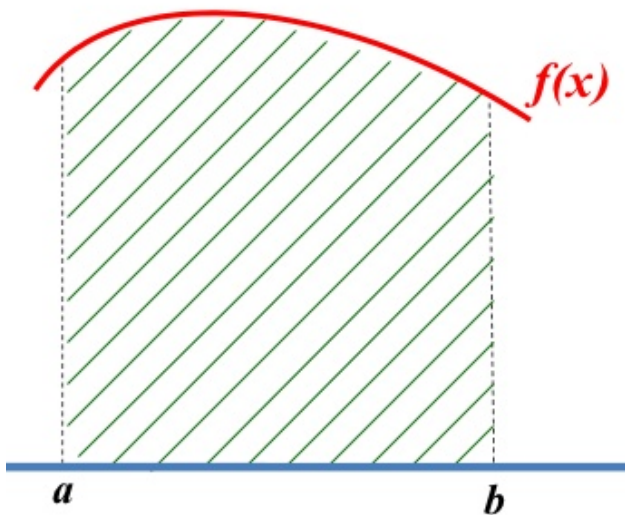
### Integral

Primitiva: Inverso da derivada

Integral Indefinida:  $\int [f(x)]' dx = f(x) + C$

Integral Definida:  $\int_a^b [f(x)]' dx = [f(x)] \Big|_a^b$

Área sobre uma curva:



$$\int_a^b f(x) = \text{Área do Gráfico}$$

## **Equações Diferenciais**

### Equação diferencial por variáveis separáveis:

Quando tiver uma igualdade com equações diferenciais de variáveis diferentes não separadas:

$$f_1(x) \cdot g_1(y)dy = f_2(x) \cdot g_2(x)$$

É necessário separá-las em lados diferentes da igualdade:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx$$

Para podermos integrar em seguida, “eliminando as derivadas”:

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx$$

### Equações diferenciais de segunda ordem homogêneas:

Onde:

$$ay'' + by' + cy = 0$$



Extrai-se a equação auxiliar:

$$ar^2 + br + c = 0$$

De raízes:  $r_1$  e  $r_2$

E:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para  $\Delta > 0$  tem-se a solução geral:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Para  $\Delta = 0$  tem-se a solução geral:

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

Para  $\Delta < 0$  tem-se a solução geral:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \text{sen}(\beta x))$$

Onde:  $r = \alpha \pm \beta i$

## Equações diferenciais de segunda ordem não homogêneas

Onde:

$$ay'' + by' + c = f(x)$$

Tem como resposta geral:

$$y_G = y_c + y_p$$

Separa-se, sua parte homogênea, a equação complementar:

$$ay'' + by' + c = 0$$

Com resposta  $y_c$ .

E obtêm-se a resposta particular pelo método dos coeficientes a serem determinados.

$y_p = Ae^{nx}$ , para  $f(x)$  com Euler elevado a  $nx$ ;

$y_p = A\cos(x) + B\text{sen}(x)$ , para  $f(x)$  com seno e/ou cosseno de  $x$ ;

$y_p = Ax + B$ , para  $f(x)$  sendo um polinômio de primeiro grau;

$y_p = Ax^2 + Bx + C$ , para  $f(x)$  sendo um polinômio de segundo grau.



## Exercícios de Fixação

### 1. Derivada

Prova 3

Dada a função  $p(x)$  abaixo:

$$p(x) = \frac{2x + 5}{\ln(2x + 5)}$$

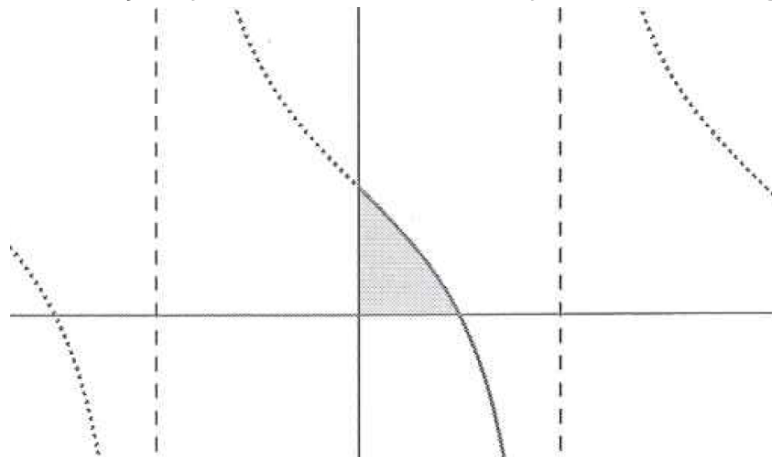
Obtenha o valor de  $x$  em que a reta tangente ao gráfico de  $p$  é horizontal.

### 2. Integral e Equações Diferenciais

Prova 3

Considere todas as funções definidas no domínio  $D = \left\{ \frac{x \in \mathbb{R}}{0} < x < \frac{\pi}{2} \right\}$ .

- Prove que a função dada por  $F(x) = -\ln(\cos x)$  é uma primitiva da função definida por  $t(x) = \operatorname{tg}(x)$ .
- Calcule a área da região sombreada na figura, em que está representada uma parte do gráfico da função  $f(x)$ , dada pela lei  $f(x) = 1 - \operatorname{tg}(x)$ .



- Resolva, para a condição inicial  $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ , a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \operatorname{tg}(x)$$



### 3. Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Prova 3

O sistema massa mola com amortecimento sujeito a uma força externa  $F(t)$ , pode ser modelado pela equação diferencial:

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

Considere nesta questão o sistema acima para  $m = 1kg$ ,  $c = 2kg/s$ ,  $k = 17kg/s^2$  e  $F(t) = 32e^{-t}$ , com  $t$  dado em segundos e  $F(t)$  dado em Newtons.

- Dê a solução geral da equação homogênea associada à equação dada no enunciado.
- Encontre uma solução particular da equação.
- Resolva a equação considerando as condições iniciais:  $x(0) = -1m$  e  $x'(0) = 5m/s$ .



## Gabarito

1.  $x = \frac{e^{-5}}{2}$

2.

a.  $\frac{d(-\ln(\cos x))}{dx} = \operatorname{tg}(x)$

b.  $\frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$

c.  $y = 2 \cos x$

3.

a.  $x(t) = e^{-t}(A \cos 4t + B \sin 4t)$

b.  $x_p = 2e^{-t}$

c.  $x(t) = e^{-t}(-3 \cos 4t + \sin 4t + 2)$