www.estudar.com.vc

Cálculo II

Resumo e Exercício P1

Resuminho Teórico e Fórmulas Parte 1

Cônicas

Conceito:

Cônicas são formas desenhadas em duas dimensões, considerando apenas os eixos x (horizontal) e y (vertical).

Tipos de Cônica:

1. Retas:

   Equação reduzida:

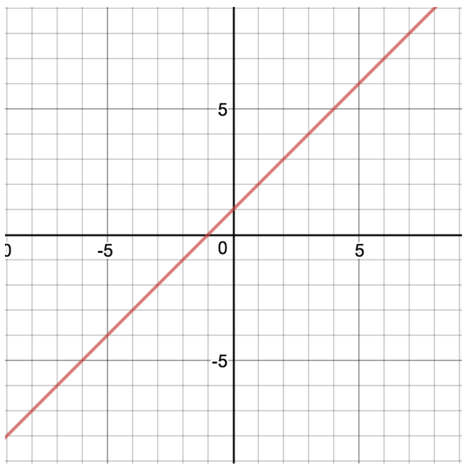
$$y = ax + b$$

   a = Coeficiente angular da reta

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \theta$$

   b = Coeficiente linear da reta → valor de y quando $x = 0$.

   Representação geométrica:



2. Circunferências:

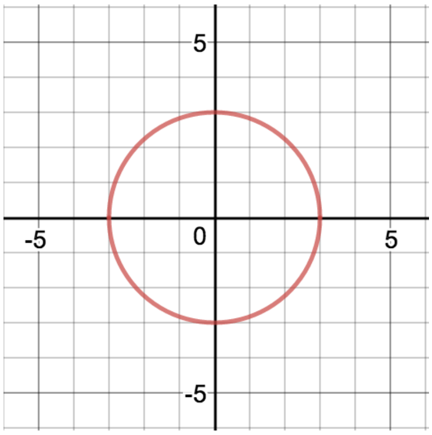
   Equação reduzida:

$$(y - y_c)^2 + (x - x_c)^2 = r^2$$

(x_c, y_c) = Centro da Circunferência

r = Raio da Circunferência

Representação geométrica:



3. Parábolas:

Equação Reduzida:

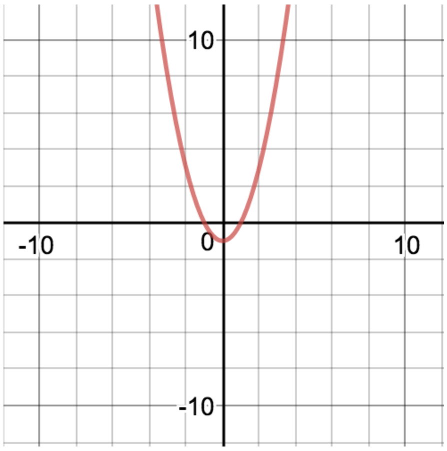
$$y = ax^2 + bx + c$$

a = Indica concavidade da parábola → se $a > 0$, concavidade para cima, e se $a < 0$, concavidade para baixo.

c = Valor de y quando $x = 0$.

Vértice: $x_v = -\frac{b}{2a}, y_v = -\frac{\Delta}{4a}, \Delta = b^2 - 4ac$

Representação geométrica:



4. Elipses:

Equação Reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$$

Ou:

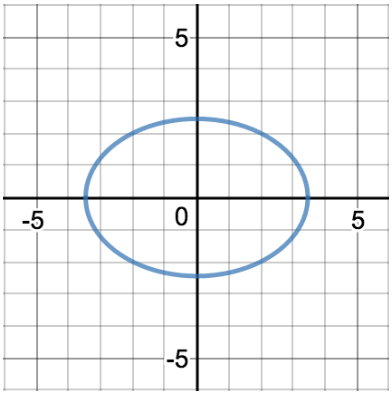
$$\frac{(y-y_c)^2}{a^2}+\frac{(x-x_c)^2}{b^2}=1$$

a = Raio maior da elipse, na direção do eixo cuja variável é numeradora sobre a

b = Raio menor da elipse, na direção do eixo cuja variável é numeradora sobre b

(x_c, y_c) = Centro da Elipse

Representação geométrica:



5. Hipérboles:

Equação Reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$$

Ou:

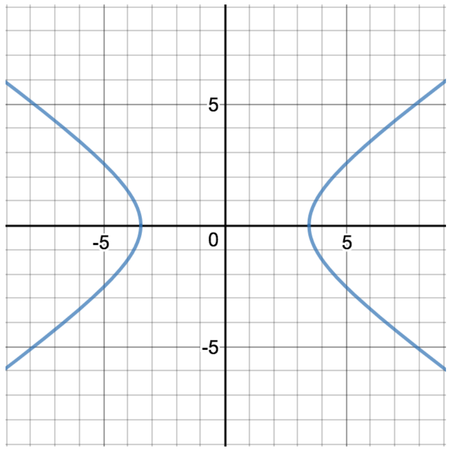
$$\frac{(y-y_c)^2}{a^2}-\frac{(x-x_c)^2}{b^2}=1$$

a = Distância entre o centro da hipérbole e o começo da figura, na direção do eixo cuja variável é numeradora sobre a

b = Distância que o eixo cuja variável é numeradora sobre b varia conforme o outro eixo varia uma unidade.

(x_c, y_c) = Centro da Hipérbole

Representação geométrica:



Funções de Duas Variáveis

$$z = f(x, y)$$

Definida em $\mathbb{R}^2$, apenas um valor de z para cada par (x, y).

Domínio de Função de Duas Variáveis:

Valores que podem ser colocados nas variáveis controladas, exceto as restrições.

Domínio máximo: $\mathbb{R}^2$

Restrições no Domínio:

1. Raízes → $Termo \geq 0$
2. Denominadores → $Termo \neq 0$
3. Denominadores em raízes → $Termo > 0$
4. Logaritmos → $Termo > 0$

<u>Gráfico do Domínio</u>:

Hachurar região dentro do domínio, tracejar fronteira não permitida.

<u>Curva de Nível</u>:

A curva de nível k é tal que:

$$f(x, y) = k$$

Para cada k diferente, há uma equação de duas variáveis diferente → Gráfico em 2D diferente.

Curvas

<u>Definição algébrica</u>:

A curva parametriza uma função de duas ou mais variáveis em uma região com menos variáveis.

$$\gamma = \big(x(t), y(t)\big)$$

Onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$

Respeitando:

$$y = f(x)$$

<u>Parametrização</u>:

Trocar variáveis por um parâmetro comum, mantendo a relação entre elas.

Exemplo comum:

$$y = x$$

Parametrizando, temos:

$$x = t \Rightarrow y = t$$

$$\gamma = (t, t)$$

$$t \in \mathbb{R}$$

Parametrização por Coordenadas Polares:

Provocar o aparecimento de $\sin t$ e $\cos t$, quando variáveis tiverem grau 2.

Exemplo comum:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Parametrizando:

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$\gamma = (\cos t\, , \sin t)$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

Curva por Interseção de Superfícies:

Isolar uma variável e substituir na outra equação, parametrizando com duas variáveis em vez de três.

Exemplo:

$$S_1 \rightarrow x + y + z = 1$$

$$S_2 \rightarrow x + y - z = 0$$

$$z = x + y$$

$$\text{Em } S_1: 2x + 2y = 1$$

Parametrizando:

$$x = t \rightarrow y = \frac{1 - 2t}{2}$$

$$z = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = \left(t, \frac{1 - 2t}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Derivada de curva:

$$\gamma' = \left(x'(t), y'(t)\right)$$

Ou:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right)$$

Vetor Tangente a uma Curva:

O vetor tangente a uma curva no ponto (x_0, y_0) é qualquer múltiplo da derivada da curva, no ponto em questão:

$$\vec{v} = \lambda\gamma' = \lambda\left(x'(t_0), y'(t_0)\right)$$

$$x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$$

Reta Tangente a uma Curva:

A reta tangente a uma curva no ponto (x_0, y_0) é a soma de um ponto que pertence a reta com qualquer múltiplo da derivada da curva, no ponto em questão:

$$r: P + \lambda\gamma'$$

$$r: (x, y) = (x_P, y_P) + \lambda\left(x'(t_0), y'(t_0)\right)$$

Exercícios Parte 1

1. Cônicas, Domínio e Curva de nível

Questão 1 – P1 2016 - Adaptada

Seja f a função, definida em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x + 2y \neq 0\}$, dada por

$$f(x, y) = \frac{x^2+2y^2+2x+4y-1}{x^2+x+2y}.$$

a. Determine equações para as curvas de nível c de f quando $c = 0{,}1\ e\ 2$.

b. Faça um esboço das curvas de nível (em linha cheia) e da restrição do domínio (em pontilhado).

2. Cônicas, Domínio e Curva de nível

Questão 1 – P1 2015 - Adaptada

Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2 + 4}$.

a. Determine e represente o domínio máximo de f.

b. Determine equações para as curvas de nível k de f para $k = 0$, $k = \sqrt{3}$, $k = 2$ e $k = \sqrt{8}$. Faça o esboço dessas curvas.

3. Parametrização e Reta Tangente a uma Curva

Questão 2 – P1 2016 - Adaptada

Seja C a curva dada pela interseção dos gráficos das funções $f(x,y) = x^2 - y^2$ e $g(x,y) = 1 - x^2 - 2y^2$.

a. Determine uma parametrização para C.

b. Determine, caso existam, todos os pontos de C nos quais a reta tangente é paralela ao eixo Ox. Escreva a equação da reta tangente em tais pontos.

4. Parametrização e Reta Tangente a uma Curva

Questão 2 – P1 2015 - Adaptada

Considere a superfície $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ e a parte do cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, com $z \geq 0$. Seja C a curva dada pelas intersecções destas superfícies.

a. Determine uma parametrização para a curva C, explicitando seu domínio.

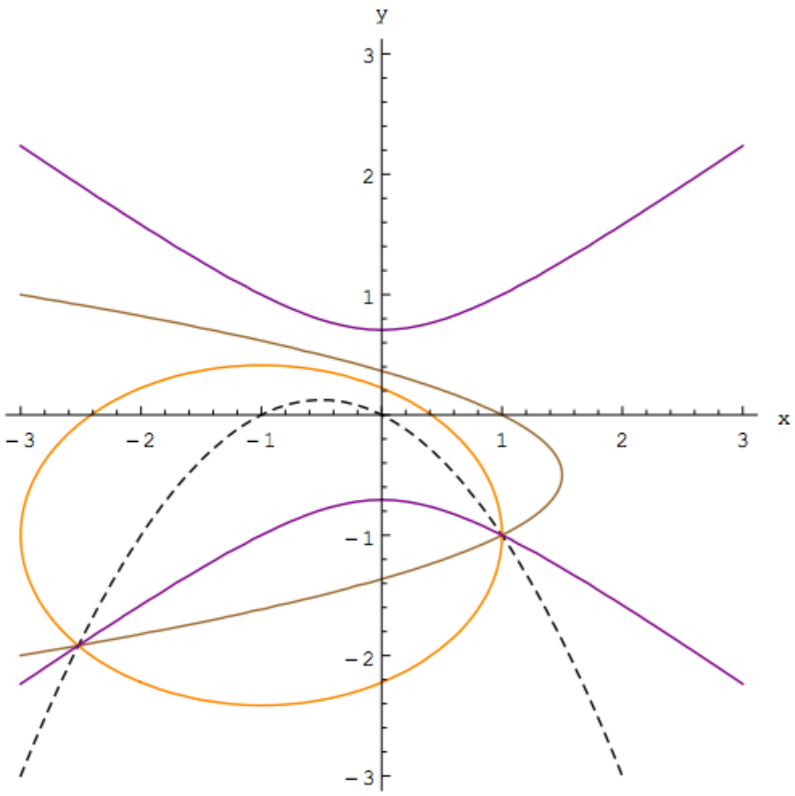
b. Escreva a equação da reta tangente à curva no ponto $P = (0,1,1)$.

Gabarito Parte 1

1)

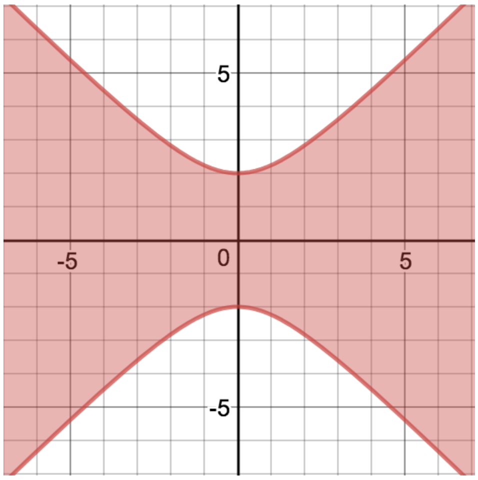
a. $c = 0$: $\frac{x+1^2}{4} + \frac{y+1^2}{2} = 1$ (elipse); $c = 1$: $x = 1 - 2y^2 - 2y$ (parábola); $c = 2$: $-x^2 + 2y^2 = 1$ (hipérbole).

b.

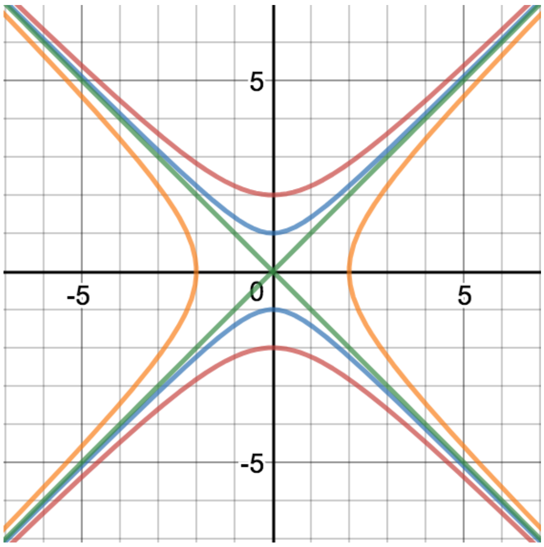


2)

a. $Dom_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 + 4 \geq 0\}$



b. $k = 0\ (vermelho) \rightarrow \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1, k = \sqrt{3}\ (azul) \rightarrow y^2 - x^2 = 1, k = 2\ (verde) \rightarrow y^2 - x^2 = 0, k = \sqrt{8}\ (amarelo) \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$



3)

a. $\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\,, \sin t\,, \frac{1}{2}(\cos t)^2 - (\sin t)^2\right), t \in [0,2\pi]$

b. $r_P: X = (0,1,-1) + \lambda(1,0,0),\ \lambda \in \mathbb{R},$ $r_Q: X = (0,-1,-1) + \lambda(1,0,0),\ \lambda \in \mathbb{R}$

4)

a. $\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}\ cos\ t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ sin\ t, \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t}\right), t \in [0,2\pi]$

b. $(x, y, z) = (0,1,1) + \lambda(-1,0,0), \lambda \in \mathbb{R}$

Resuminho Teórico e Fórmulas Parte 2

Quádricas

Quádricas são formas em três dimensões (ou seja, considerando os eixos x, y e z.

Tipos de Quádricas:

1. Elipsoides:

   Equação Reduzida:

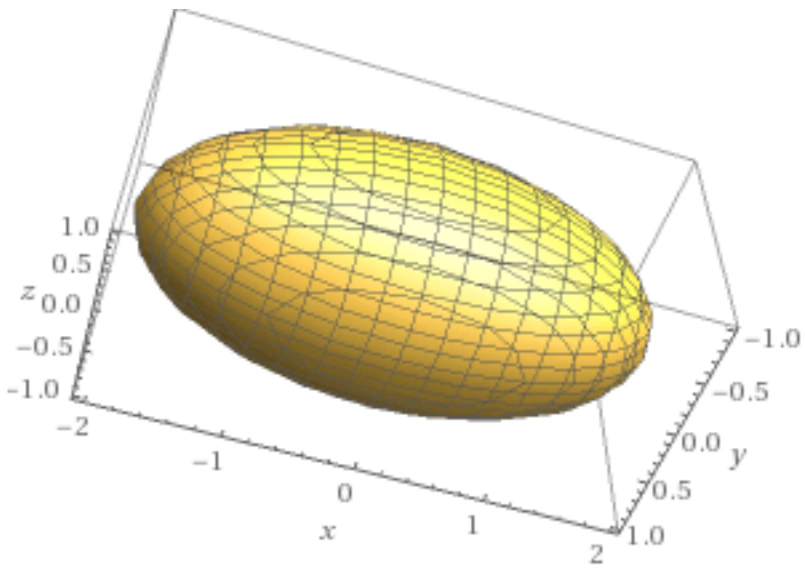
$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

   a, b, c = Raios do elipsoide na direção do eixo cuja variável é numeradora ao raio em questão.

   (x_c, y_c, z_c) = Centro do Elipsoide

   Todos os sinais positivos, 1 na direita, 3 variáveis ao quadrado

   Representação geométrica:



2. <u>Hiperboloides de uma Folha:</u>

Equação Reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}-\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

Ou:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

Ou:

$$-\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

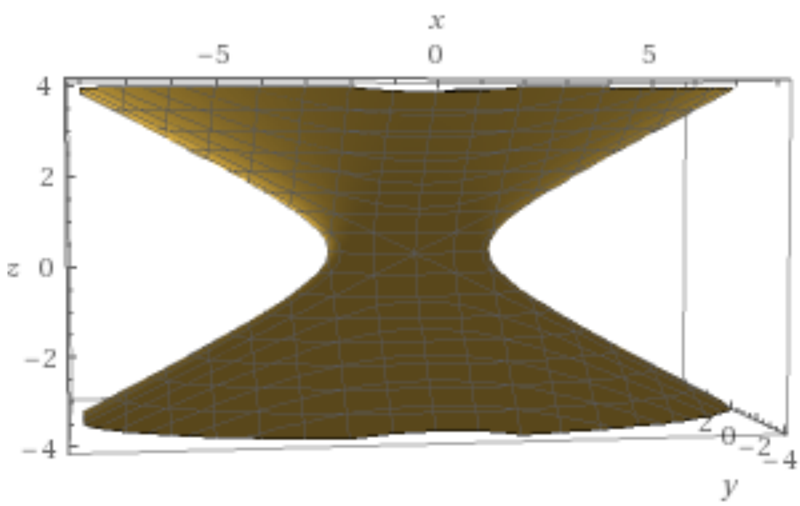
b, c = Raios das elipses (curvas de nível)

a = Distância característica às hipérboles (curvas de nível)

(x_c, y_c, z_c) = Centro do Hiperboloide

Um sinal negativo, 1 na direita, 3 variáveis ao quadrado

Representação geométrica:



3. <u>Hiperboloides de Duas Folhas:</u>

Equação Reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}-\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

Ou:

$$-\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

Ou:

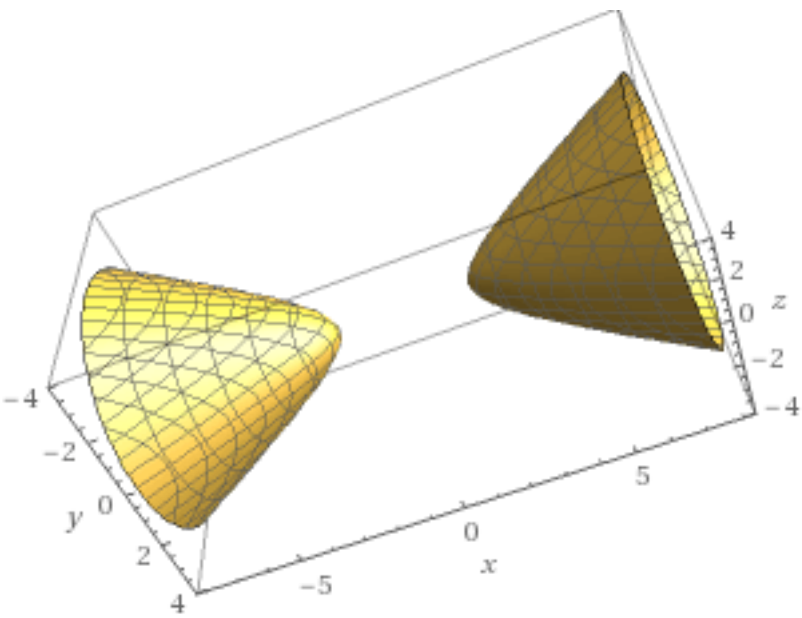
$$-\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}-\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

a, b, c = Distâncias características ao hiperboloide

(x_c, y_c, z_c) = Centro do Hiperboloide

Dois sinais negativos, 1 na direita, 3 variáveis ao quadrado

Representação geométrica:



4. Paraboloides Elípticos:

Equação Reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=cz$$

Ou:

$$\frac{(y-y_c)^2}{a^2}+\frac{(z-z_c)^2}{b^2}=cx$$

Ou:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(z-z_c)^2}{b^2}=cy$$

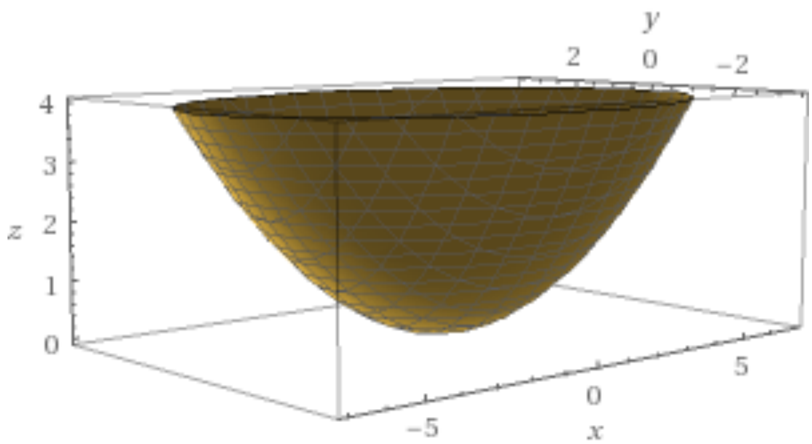
a, b = Raios das curvas de nível (elipses)

c = Multiplicador da variável de grau 1

(x_c, y_c) = Centro do Paraboloide

Sinais positivos, variável de grau 1 na direita, 2 variáveis ao quadrado na esquerda

Representação geométrica:



5. <u>Paraboloides Hiperbólicos (Sela):</u>

Equação Reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=cz$$

Ou:

$$\frac{(y-y_c)^2}{a^2}-\frac{(z-z_c)^2}{b^2}=cx$$

Ou:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(z-z_c)^2}{b^2}=cy$$

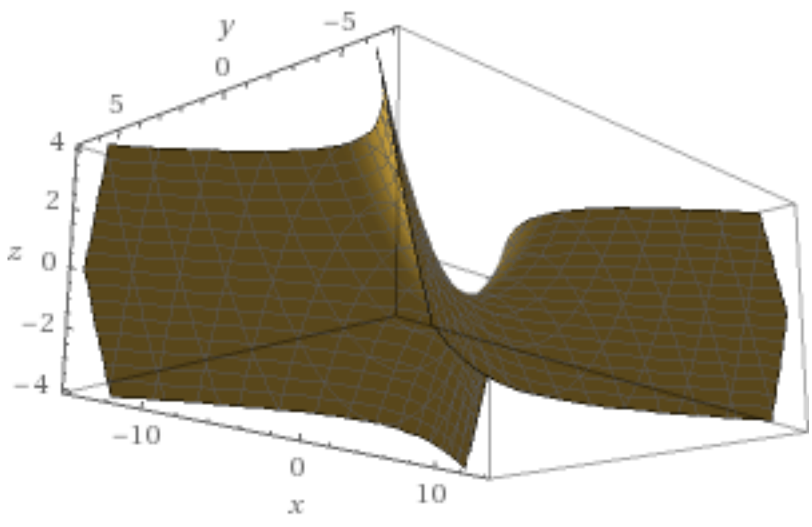
a, b = Distância relativas às curvas de nível (hipérboles)

c = Multiplicador da variável de grau 1

(x_c, y_c) = Centro do Paraboloide

Sinal negativo, variável de grau 1 na direita, 2 variáveis ao quadrado na esquerda

Representação geométrica:



6. Cones:

Equação Reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}-\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=0$$

Ou:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=0$$

Ou:

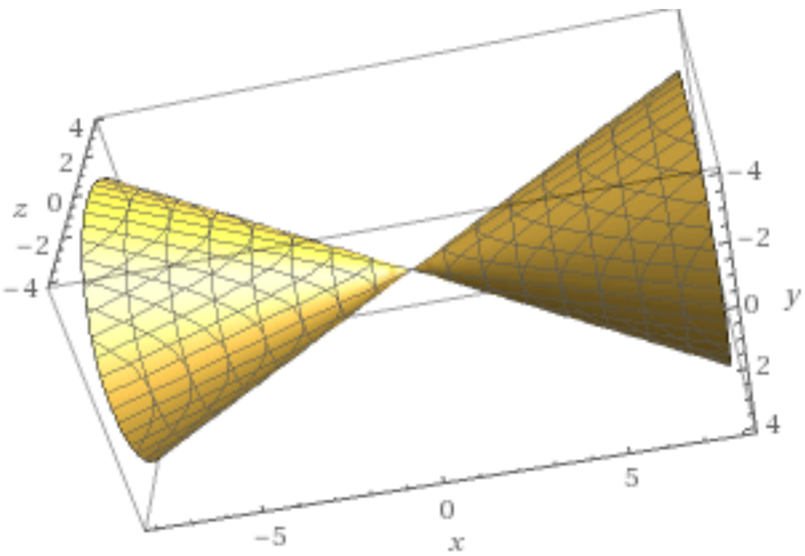
$$-\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=0$$

Variável negativa: eixo do cone

(x_c, y_c, z_c) = Centro do Cone

Sinal negativo, 0 na direita, variáveis de grau 2

Representação geométrica:



Limites e Continuidade para Funções de Duas Variáveis

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Limite representa para quanto tende o valor da função $f(x,y)$, quando o par (x,y) tende para um (x_0,y_0).

Limite Fundamental:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1$$

Continuidade:

Se a função é contínua e definida no ponto (a,b), então:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Métodos de Resolução de Limites:

1. Aproximação por Diferentes Curvas:

   Prova que limite não existe ou vale um resultado diferente do esperado:

   Se $\lim_{t\to t_0} f\big(\gamma_0(t)\big) \neq \lim_{t\to t_1} f\big(\gamma_1(t)\big)$, não existe limite.

   Ou seja, podemos utilizar algumas curvas e substituir x e y na função, calculando o limite; se os valores dos limites forem diferentes, com curvas diferentes, o limite não existe.

Curvas mais utilizadas:

Eixo x: $\gamma(t) = (t, 0)$
Eixo y: $\gamma(t) = (0, y)$
Reta $y = x$: $\gamma(t) = (t, t)$

Observar graus das variáveis → se existe proporção, utilizar curva com a proporção oposta.

Exemplo:

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y}{x^4 + y^2}$$

Proporção dos graus: 2 para 1

Curva sugerida: $\gamma(t) = (t, t^2)$

2. <u>Teorema do Confronto</u>:

Prova que limite vale 0:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} h(x,y) = 0$$

Quando:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = 0$$

E:

$\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ é limitada

Para provar que a divisão de $f(x,y)$ por $g(x,y)$ é limitada, precisamos provar que o numerador é menor do que o numerador, e maior ou igual a zero:

$$0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$$

Portanto:

$$0 \leq \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \leq 1$$

3. Curvas de Nível:

Prova que limite não existe:

$$\text{Se } f\big(\gamma_1(t)\big) = k_1, f\big(\gamma_2(t)\big) = k_2, \text{ e } k_1 \neq k_2$$

$$\lim_{t \to t_1} f\big(\gamma_1(t)\big) = k_1 \neq k_2 = \lim_{t \to t_2} f\big(\gamma_t(t)\big)$$

Se os limites de curvas que geram diferentes curvas de nível são diferentes (ou seja, se um mesmo ponto é capaz de gerar diferentes curvas de nível), não existe limite.

Exercícios Parte 2

1. Quádricas e intersecção de superfícies

P1 2012 – Questão 2 - Adaptada

Seja S a superfície de equação $-2x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$.

a. Estude a intersecção de S com cada plano $x = k$.
b. Estude a intersecção de S com o plano $y = 1$.
c. Esboce a superfície S.
d. Encontre uma parametrização para a intersecção de S com o plano $2x + y = 2$

2. Limites Elaborados

P1 2016 – Questão 3 - Adaptada

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \frac{\sin(x-y)}{x^3-y^3}, se\ x \neq y \\ \frac{1}{3}, se\ x = y \end{cases}$

a. Determine se f é contínua no ponto $(0,0)$.

b. Determine se f é contínua no ponto $(1,1)$.

c. Determine se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^{10}}{x-y^5}$ existe.

d. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}$.

3. Limites Elaborados

P1 2015 – Questão 3 - Adaptada

Seja f a função dada por $f(x,y) = x^2 \ln(3x^2+y^2) \arctan(\frac{1}{y^2-x^2})$.

a. Decida, justificando, se existe ou não $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \ln(3x^2+y^2)$.

b. Verifique se o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe, e, em caso afirmativo, determine seu valor. Justifique.

c. Verifique se o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ existe, e, em caso afirmativo, determine seu valor. Justifique.

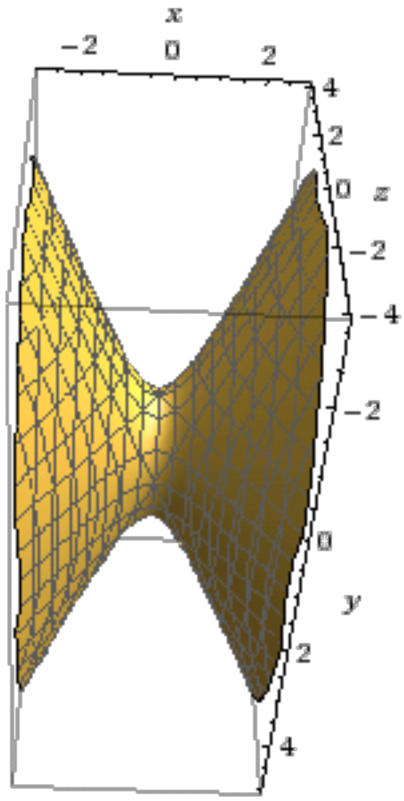
Gabarito Parte 2

1)

a. $x = k$: circunferências no plano $x = k$, $C = (k, 1, 0)$ e raio $r = \sqrt{1 + 2k^2}$.

b. $y = 1$: $z^2 - 2x^2 = 1$, hipérbole no plano $y = 1$.

c. S é um hiperboloide de uma folha:



d. Uma parametrização é $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma(t) = (1 + \cos t\,, -2\cos t\,, \sqrt{2}\sin t)$.

2)

a. A função é contínua no ponto.

b. A função não é contínua no ponto.

c. Não existe.

d. 1

3)

a. 0

b. 0

c. Não existe