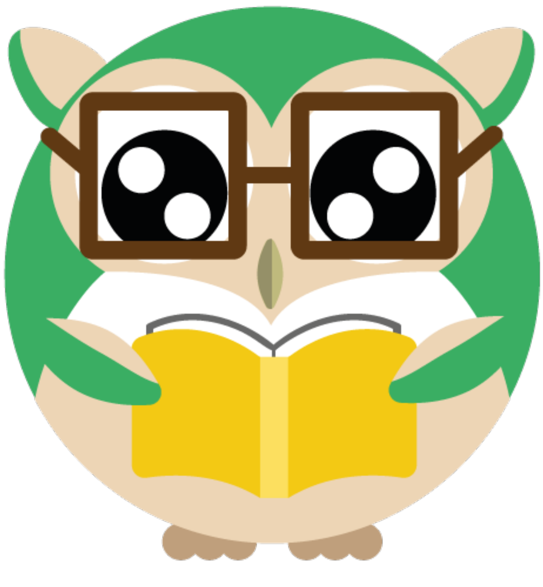
www.estudar.com.vc

Álgebra Linear

Transformações Lineares



Fórmulas e Resumo Teórico

Para fins gerais, considere V um espaço vetorial e uma transformação $T: V \rightarrow W$.

Propriedades de Transformações Lineares

- T é linear se:

$$(I)\ T(u+v) = T(u) + T(v)$$
$$(II)\ T(\lambda u) = \lambda T(u)$$
$$(III)\ T(0_V) = 0_W$$

Para quaisquer $u, v \in V$.

Núcleo de uma Transformação

- Define-se o núcleo por:

$$Ker\ T = \{todos\ v \in V : T(v) = 0_W\}$$

Em outras palavras, são todos os vetores que "levam" no zero.

Imagem de uma Transformação

- Define-se imagem por:

$$Im\ (T) = \{todos\ w \in W : existe\ um\ v \in V\ tal\ que\ T(v) = w\}$$

Teorema do Núcleo e da Imagem

- Ele se refere às dimensões dos espaços envolvidos.

$$\dim(V) = \dim\big(Ker\ (T)\big) + \dim\big(Im\ (T)\big)$$

Onde V é o domínio da transformação.

Injetividade

- Diz-se que uma transformação é injetora se, e somente se:

$$Para\ u \neq v\ \Rightarrow T(u) \neq T(v)$$

Ou seja, não podemos ter "imagens repetidas".

- Isso equivale a dizer que: $T\ é\ injetora\ \Leftrightarrow\ \dim\big(Ker\ (T)\big) = 0$

Sobrejetividade

- Dizemos que T é sobrejetora se, e somente se:

$$Im\ (T) = W \Leftrightarrow \dim(Im\ (T)) = \dim(W)$$

Operadores Lineares

- São transformações que sai e chegam no mesmo espaço, ou seja, são do tipo:

$$T: V \to V$$

Para eles, temos algumas condições especiais:

$$T \text{ é } injetora \ \Leftrightarrow \ T \text{ é } sobrejetora \Leftrightarrow \ T \text{ é } bijetora$$

Se preferir, pode pensar que: se um operador é alguma dessas coisas acima, ele é, automaticamente, todas elas ao mesmo tempo.

Operador Identidade

- Esse é o operador que não faz "nada" (na verdade, ele é um dos mais úteis). Ele toma um vetor e leva nele próprio. Pode escrever assim:

$$I: V \to V$$
$$v \mapsto v$$

Matriz de uma Transformação

- Essa matriz é um jeito de codificar a transformação. Tome $T: V \to W$, com B sendo uma base de V e C sendo uma base de W. Seja então:

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}\ e\ C = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$$

O algoritmo de construção da matriz é:

(I) Tome as imagens dos vetores da base $B \to T(v_1) = u_1, \dots, T(v_n) = u_n$

(II) Decomponha os vetores das imagens na base C

$$u_1 = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m, \quad u_2 = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m, \quad \dots,$$
$$u_n = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_m w_m$$

(III) Bote os escales obtidos nas colunas na ordem crescente (u_1 primeiro):

$$[T]_{BC} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m & \beta_m & \cdots & \gamma_m \end{bmatrix}$$

Repare nos seguintes fatos:

(I) $[T]_{BC}$ tem tamanho $m \times n$, ou seja, ela tem tantas linhas quantos vetores da base de chegada C (tínhamos m vetores) e tantas colunas quantos vetores da base de saída B (tínhamos n vetores).

(II) A matriz trabalha com os ESCALARES que multiplicam os vetores das bases e não com os vetores propriamente ditos.

(III) A matriz é SUSCETÍVEL à escolha de bases.

Utilização da Matriz de uma Transformação

- A matriz serve para que possamos computar a transformação da seguinte maneira:

$$[T(v)]_C = [T]_{BC} \cdot [v]_B$$

Com $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $C = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$. É necessário notar que $[v]_B$ corresponde às coordenadas do vetor v na base B. Então, se:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Temos que:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Encontrando o Núcleo através da Matriz

- O núcleo corresponde aos vetores que "levam" no zero. Para encontra-lo usando a matriz, basta escrever o vetor v como uma incógnita do tipo: $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B$. Então, igualamos tudo a zero e teremos um sistema linear homogêneo:

$$[T]_{BC} \cdot [v]_B = [T(v)]_C \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m & \beta_m & \cdots & \gamma_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_C \iff$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \cdots + \gamma_1 x_n = 0 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \gamma_2 x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_m x_1 + \beta_m x_2 + \cdots + \gamma_m x_n = 0 \end{cases}$$

Ao final, você encontrará condições para as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$. Então, você pode escrever o conjunto gerador do núcleo.

Encontrando a Imagem através da Matriz

- O conjunto gerador da imagem corresponde às imagens dos vetores da base de saída B. Para encontra-lo usando a matriz, basta tomar cada vetor da base escrito nela própria. Repare agora que se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ podemos concluir que:

$$v_1 = (1, 0, \dots, 0)_B, v_2 = (0, 1, \dots, 0)_B, \dots, v_n = (0, 0, \dots, 1)_B$$

Isso pois um vetor da base, escrito nela própria é uma vez ele próprio. Então podemos tomar cada uma das imagens e o conjunto de todas elas será o conjunto gerador da Imagem. Logo:

$$Im\ (T) = [T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)]$$

Transformação Inversa

- Do mesmo modo que fazemos as transformações, podemos querer desfazê-la. Há algumas condições que devemos ter em mente. Seja T uma transformação. Temos que:

$$T \text{ é } invertível \ \Leftrightarrow T \text{ é } bijetora$$
$$T \text{ é } invertível \ \Leftrightarrow [T]_{BC} \text{ é } invertível$$

Ou seja, a transformação é invertível se, e somente se, sua matriz com respeito a quaisquer bases B e C também for invertível. Mas sabemos da teoria de matrizes que:

$$[T]_{BC} \text{ é } invertível \ \Leftrightarrow \det([T]_{BC}) \neq 0$$

Para **operadores lineares** (transformações do tipo $T: V \to V$), temos algo interessante. Como para operadores vale que:

$$T \text{ é } injetora \ \Leftrightarrow \ T \text{ é } sobrejetora \Leftrightarrow \ T \text{ é } bijetora$$

Concluímos que:

$$T \text{ é } invertível \Leftrightarrow T \text{ é } injetora \Leftrightarrow \dim\big(Ker(T)\big) = 0$$

Operações com Transformações

- Podemos realizar operações com as transformações. Podemos multiplica-las por escalares e somar transformações. Para exemplificar, tome as transformações $S: V \to W$ e $T: V \to W$. É importante que o domínio e contradomínio de ambas coincidam. Define-se as operações de soma e multiplicação por escalar do seguinte modo:

- Soma: $(S + T)(v) = S(v) + T(v)$
- Multiplicação por escalar: $(\lambda T)(v) = \lambda T(v)$

Podemos ainda tomar conclusões a respeito das matrizes. Considere que escrevemos as matrizes $[S]_{BC}$ e $[T]_{BC}$. Conclui-se que:

$$[S+T]_{BC} = [S]_{BC} + [T]_{BC}$$
$$[\lambda T]_{BC} = \lambda [T]_{BC}$$

<u>Composição de Transformações</u>

- A única operação que resta fazer com transformações é a **composição**. Tomamos a composição assim como fazemos com funções. Então, dizemos que:

$$(S \circ T)(v) = S\big(T(v)\big)$$

Traduzindo isso de modo prático, definiremos $T: U \to V$ e $S: V \to W$. Tome ainda as bases B, C e D para os espaços U, V e W, respectivamente. Obtemos, então, o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "{[T]_{BC}}"] \arrow[rr, bend right, "{[S\circ T]_{BD}}"'] & V \arrow[r, "{[S]_{CD}}"] & W \end{tikzcd}$$

Para obter a matriz da transformação composta, fazemos a seguinte operação:

$$[S \circ T]_{BD} = [S]_{BD} \cdot [T]_{BC}$$

Obs: Se você, alguma vez, já se perguntou por que as matrizes são multiplicadas do jeito que são, a resposta esta aí em cima. A multiplicação de matrizes é definida do jeito que é para que essa equação de cima valha. Tão bonitinho isso ☺!

Exemplo Resolvido

Tomarei uma transformação e calcularei TUDO que é possível ser calculado. Seja:

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (x + 2z, x + 2y - z)$$

(I) Verificando que T é linear

- Primeiro devemos ver que $T(u + v) = T(u) + T(v)$. Tomemos $u = (a, b, c)$ e $v = (x, y, z)$. Temos que:

$$T(u) = (a + 2c, a + 2b - c)$$
$$T(v) = (x + 2z, x + 2y - z)$$

Ainda: $u + v = (a + x, b + y, c + z)$. Verificaremos que:

$$T(u + v) = T(a + x, b + y, c + z)$$
$$T(a + x, b + y, c + z) = ((a + x) + 2(c + z), (a + x) + 2(b + y) - (c + z))$$
$$T(a + x, b + y, c + z) = (a + x + 2c + 2z, a + x + 2b + 2y - c - z)$$

Note que $T(u + v) = T(u) + T(v)$.

- Agora, devemos ver que $T(\lambda v) = \lambda T(v)$. Tomemos $v = (x, y, z)$. Temos que:

$$T(v) = (x + 2z, x + 2y - z)$$

Mas: $\lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. Então:

$$T(\lambda v) = T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x + 2(\lambda z), (\lambda x) + 2(\lambda y) - (\lambda z))$$
$$T(\lambda v) = \big(\lambda(x + 2z), \lambda(x + 2y - z)\big) = \lambda(x + 2z, x + 2y - z) = \lambda T(v)$$

Acabamos de ver então que: $T(\lambda v) = \lambda T(v)$.
Como atendemos às duas propriedades, T é linear!

(II) Encontrando Núcleo e Imagem

- Para encontrar o **núcleo**, basta zerar o resultado da transformação. Temos que $T(x, y, z) = (x + 2z, x + 2y - z)$. Logo, $T(x, y, z) = (0,0)$ se, e somente se:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Monta-se a matriz desse sistema linear e escalona-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = \dfrac{3}{2} z \end{cases}$$

Repare que escrevemos x e y em função de z (variável livre do sistema). Podemos então dizer que:

$$Ker\ (T) = [(x, y, z)] = \left[\left(-2z, \frac{3}{2} z, z\right)\right]$$

Botando z em evidência, teremos:

$$Ker\ (T) = \left[\left(-2, \frac{3}{2}, 1\right)\right]$$

- Para encontrar a **imagem**, basta calcular a imagem dos vetores de uma base do espaço de saída. Como estamos em $\mathbb{R}^3$, tomarei a base canônica $B = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$. Lembrando que $T(x, y, z) = (x + 2z, x + 2y - z)$, teremos:

$$T(1,0,0) = (1 + 2.0, 1 + 2.0 - 0) = (1,1)$$
$$T(0,1,0) = (0 + 2.0, 0 + 2.1 - 0) = (0,2)$$
$$T(0,0,1) = (0 + 2.1, 0 + 2.0 - 1) = (2,-1)$$

Podemos escrever então que:

$$Im(T) = [(1,1); (0,2); (2,-1)]$$

Repare que isso **não** é uma base de $Im(T)$, pois o conjunto é LD. Podemos retirar o terceiro vetor, para obtermos uma base da imagem, de modo que obteremos:

$$Im(T) = [(1,1); (0,2)]$$

(III) Teorema do Núcleo e da Imagem

- Note agora como esse teorema funciona. O espaço de saída é $\mathbb{R}^3$ e $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Vimos que:

$$Ker\ (T) = \left[\left(-2, \frac{3}{2}, 1\right)\right] \Rightarrow \dim\big(Ker(T)\big) = 1$$
$$Im(T) = [(1,1); (0,2)] \Rightarrow \dim\big(Im(T)\big) = 2$$

Constatamos então que:

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim\big(Ker(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big)$$

(IV) Construindo Matriz da Transformação

- Para construirmos essa matriz, precisaremos de duas bases. Tomarei uma escolha arbitrária:

$$B = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}\ e\ C = \{(1,2); (0,1)\}$$

O primeiro passo era tomar as imagens de cada um dos elementos da base de saída (base B, pois é a correspondente ao $\mathbb{R}^3$). Já calculamos isso e vimos que:

$$T(1,0,0) = (1,1), \;\; T(0,1,0) = (0,2), \;\; T(0,0,1) = (2,-1)$$

Precisamos agora decompor essas imagens na base de chegada (base C). É fácil ver que:

$$T(1,0,0) = (1,1) = 1.(1,2) + (-1).(0,1) \Rightarrow T(1,0,0) = (1,-1)_B$$
$$T(0,1,0) = (0,2) = 0.(1,2) + 2.(0,1) \Rightarrow T(0,1,0) = (0,2)_B$$
$$T(0,0,1) = (2,-1) = 2.(1,2) + (-5).(0,1) \Rightarrow T(0,0,1) = (2,-5)_B$$

Escrevemos, então, os respectivos escalares nas colunas, na ordem tomada na base. Teremos:

$$[T]_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

(V) Obtendo o Núcleo pela Matriz da Transformação

- Para encontrar o núcleo desta forma, basta utilizarmos a igualdade:

$$[T(v)]_C = [T]_{BC} \cdot [v]_B$$

Teremos que "zerar" a resposta, de modo que ficamos com:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_C \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo por escalonamento, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = \dfrac{3}{2}z \end{cases}$$

Não esqueçam que já calculamos o núcleo anteriormente e caímos EXATAMENTE neste mesmo sistema. É evidente que o núcleo é o mesmo (calculado de ambas as formas). Então, verificamos de novo que:

$$Ker\ (T) = \left[\left(-2, \frac{3}{2}, 1\right)\right]$$

(VI) Obtendo a Imagem de um Vetor Qualquer pela Matriz

Imagine que temos o vetor de $\mathbb{R}^3$ $v = (1,3,5)$. Para obtermos a imagem dele utilizando a matriz precisamos, primeiro, decompô-lo na base de saída B. Como essa é a base canônica, teremos que $v = (1,3,5) = (1,3,5)_B$. Então, multiplicamos essas coordenadas pela matriz da transformação:

$$[T(v)]_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 11 \\ -20 \end{bmatrix}_C$$

Obtivemos então que: $T(v) = (11, -20)_C$. Essas são as **coordenadas** da imagem. Para obtermos o **vetor resposta**, devemos multiplicar esses escalares pelos vetores da base C. Como sabemos que a base é $C = \{(1,2); (0,1)\}$, teríamos:

$$T(v) = (11, -20)_C = 11.(1,2) + (-20).(0,1) = (11, 2)$$

Como lembramos da expressão da transformação original $T(x, y, z) = (x + 2z, x + 2y - z)$, podemos verificar:

$$T(v) = T(1,3,5) = (1 + 2.5, 1 + 2.3 - 5) = (11,2)$$

Acabamos de constatar que tudo funciona ☺ !

estudar.com.vc

(VII) Compondo com outra transformação

- Para compor a nossa transformação T com outra transformação S, é NECESSÁRIO que a dimensão do espaço de saída de S coincida com a dimensão do espaço de chegada de T. Ou seja, como $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, temos que $S: V \to W$ com a exigência de que $\dim V = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Para exemplificar, tomaremos:

$$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (x + 3y, 3x + y)$$

Lembrem-se que construímos a matriz $[T]_{BC}$. Então, devemos construir a matriz $[S]_{CD}$, onde C é base do espaço de chegada de T que deve coincidir com a base do espaço de saída de S. Todavia, D é uma base de escolha arbitrária. Tomaremos o seguinte:

$$C = \{(1,2); (0,1)\} \; e \; D = \{(1,0); (0,1)\}$$

Calculemos as imagens dos vetores de C por S:

$$S(1,2) = (1 + 3.2, 3.1 + 2) = (7,5)$$
$$S(0,1) = (0 + 3.1, 3.0 + 1) = (3,1)$$

Como D é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, teremos que:

$$S(1,2) = (7,5) = (7,5)_D$$
$$S(0,1) = (3,1) = (3,1)_D$$

Obtemos, então, que:

$$[S]_{CD} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular a composição $[S \circ T]_{BD}$ basta fazer:

$$[S \circ T]_{BD} = [S]_{CD} \cdot [T]_{BC}$$
$$[S \circ T]_{BD} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$