www.estudar.com.vc

Álgebra Linear

Resumo Conceitos Básicos

Mudança de base

Colocar as coordenadas do vetor em notação matricial

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}, [\vec{v}]_F = \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{bmatrix}$$

$[\vec{v}]_B = M_{BF}[\vec{v}]_F$, tal que a matriz de mudança de base é construída colocando as coordenadas dos vetores da base de saída na base de chegada.

$$M_{BF} = \begin{bmatrix} [\vec{f_1}]_B & [\vec{f_2}]_B & [\vec{f_3}]_B \end{bmatrix}$$

Propriedades

- $M_{BF} = M_{FB}^{-1}$
- $M_{BF} = M_{BG}M_{GF}$

Orientação de V^3

B e F tem mesma orientação $\Leftrightarrow \det(M_{BF}) > 0$ (orientação positiva)
B e F tem orientações opostas $\Leftrightarrow \det(M_{BF}) < 0$ (orientação negativa)

Produto Vetorial

$$\vec{x} = \vec{u} \wedge \vec{v}, \text{ tal que } \begin{cases} \|\vec{x}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| sen\theta \\ \vec{x} \perp \vec{u} \ e \ \vec{x} \perp \vec{v} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) \text{ é } base \ positiva \end{cases}$$

Se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD (paralelos)

$A = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ é a área do paralelogramo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$\frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{2}$ é a área do triângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$A = b.h,\ h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ é a altura do triângulo ABC em relação a base AB

Se estiver em uma ***base ortonormal positiva***

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \text{"}det\text{"} \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$, onde $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_B$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_B$

Resolvendo por cofatores na primeira linha,

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} \hat{\imath} - det \begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{pmatrix} \hat{\jmath} + det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \hat{k}$

Propriedades

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \wedge \vec{v} = \alpha\vec{a} \wedge \vec{v} + \beta\vec{b} \wedge \vec{v}$

Produto Misto

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} * \vec{w}$

$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ é o volume do paralelepípedo formado por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$

$V = A.h, \quad h = \frac{|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$

Volume do tetraedro

$V = \frac{|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|}{6}$

Se estiver em uma ***base ortonormal positiva***

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = det \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{bmatrix}$

Propriedades

- $[\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha[\vec{a},\vec{v},\vec{w}] + \beta[\vec{b},\vec{v},\vec{w}]$
- $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$ (Altera o sinal ao alterar uma posição)
- $\vec{u}\wedge\vec{v} * \vec{w} = \vec{u} * \vec{v}\wedge\vec{w}$
- $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ não se altera ao adicionar uma combinação linear dos outros vetores
  $[\vec{u},\vec{v} + \lambda\vec{u} + \alpha\vec{w},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

Produto Misto na mudança de base

$\det(M_{BF}) = \frac{[\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}]}{[\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3}]}$

(Produto misto da base de saída / produto misto da base de chegada)

Se V^3 está orientado,

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] > 0 \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é base positiva

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] < 0 \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é base negativa

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ é LD

Sistema de Coordenadas

$S = (O, E)$, é o sistema com origem no ponto O e base E.
Se E é **ortonormal**, S é um **sistema ortogonal**

Ponto P = $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)_S$
$\overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P)_E$
$P + \lambda\vec{v} = (x + \lambda a, y + \lambda b, z + \lambda c)_S$

Média entre 2 pontos
$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

Se S for **ortogonal**, Distância entre 2 pontos
$dist(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$

<u>Retas</u>

Equação vetorial
$r: X = A + \lambda\vec{v} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Equações paramétricas
$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$$

Equações simétricas

$$\lambda = \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

<u>Planos</u>

Equação vetorial

$\pi: X = A + \lambda\vec{v} + \mu\vec{u} \ \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

Equação paramétrica

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu m \\ y = y_0 + \lambda b + \mu n \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases} \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Equação geral

$\pi: ax + by + cz + d = 0$

Vetor normal ao plano

$\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{u}$

Se o sistema S for **ortogonal**,

$\pi: ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow$ Vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$

Como chegar na equação geral

- Resolver $det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ m & n & p \end{bmatrix} = 0$

  sendo $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$

Posições Relativas

Reta-Reta

- $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ é LD ⇔ $\vec{r}$ paralelo a $\vec{s}$
  - Possui 1 ponto em comum ⇔ r = s
  - Não possui ponto em comum ⇔ r ∩ s = ∅
- $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ é LI, pegue ponto $A \in r$ e $B \in s$
  - $\{\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}\}$ LI ⇔ r, s são reversas
  - $\{\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}\}$ LD ⇔ r, s são concorrentes (tem ponto em comum)

Reta-Plano

- $\vec{r} \perp \vec{n}$ ⇔ r paralelo a π
  - Possui 1 ponto em comum ⇔ r contido em π
  - Não possui ponto em comum ⇔ r ∩ π = ∅
- Caso contrário, r e π são transversais (r ∩ $\pi = P$)

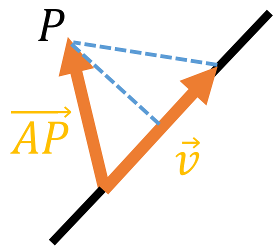
Plano-Plano

- $\{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\}$ é LD ⇔ planos são paralelos
  - Possui 1 ponto em comum ⇔ $\pi_1 = \pi_2$
  - Não possui ponto em comum ⇔ $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$
- $\{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\}$ é LI ⇔ $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ (intersecção é uma reta)
  - Achar a intersecção => igualar as equações dos planos

<u>Distâncias</u>

Ponto-Reta

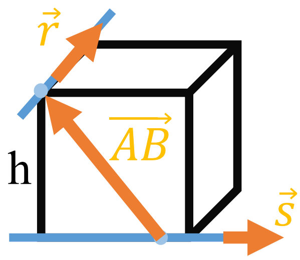
$d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$ (Altura do triângulo)



Reta-reta

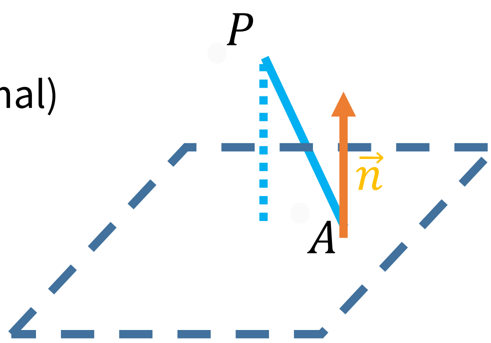
- Se forem paralelas, pegar um ponto A e fazer $d(A,s)$
- Se não,

$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{AB},\vec{r},\vec{s}]|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|}$ (Altura do paralelepípedo)



Ponto-Plano

$d(P,\pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} * \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ (Projeção de AP na normal)



Com a equação geral do plano e o ponto,
$\pi: ax + by + cz = 0$
$P = (x_0, y_0, z_0)$

$d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$