estudar.com.vc

Cálculo

Sequências e Séries

1. Sequências numéricas

Uma sequência numérica pode ser definida como um conjunto de números que obedecem uma certa "regra". Essa "regra" é chamada de lei de formação da sequência.

$1, 2, 4, 8 \ldots \rightarrow a_n = 2^n \rightarrow$ Lei de formação da sequência

Uma propriedade importante das sequências é sua convergência. Define-se:

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L \rightarrow\ a_n$ converge para L. Caso contrário, a_n diverge.

Teorema da Sequência Monótona:

Dada uma sequencia a_n:

Se a_n for crescente $(a_{n+1} > a_n)$ e limitada superiormente $a_n \leq M, M \in R$, então a_n é convergente.

Se a_n for decrescente $(a_{n+1} < a_n)$ e limitada inferiormente $a_n \geq M, M \in R$, então a_n é convergente.

2. Séries Numéricas

Uma série pode ser definida matematicamente como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Assim, a série é simplesmente a soma de todos os termos de uma dada sequência a_n.

Sendo a série um somatório, este somatório pode tanto convergir como divergir. Ou seja, a soma pode estourar para infinito ou tender até um certo número. Existem critérios que nos ajudam a determinar a convergência de uma série.

Critério do Termo Geral:

Dada uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Vale ressaltar que este critério vale para **qualquer** série. Outros critérios, como os próximos quatro, funcionam apenas para séries de termos positivos.

<u>Critério da Raiz:</u>

Dada uma série de termos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Seja $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

$L > 1 \rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge
$L < 1 \rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
$L = 1 \rightarrow$ Nada podemos afirmar

<u>Critério da Razão:</u>

Dada uma série de termos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Seja $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$L > 1 \rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge
$L < 1 \rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
$L = 1 \rightarrow$ Nada podemos afirmar

<u>Critério da Integral:</u>

Dada uma série de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com a_n obedecendo as seguintes propriedades:

$\rightarrow$ a_n é decrescente
$\rightarrow$ O termo de geral de a_n vai à zero $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$

Definimos uma função $f(x)$ de tal forma que $f(n) = a_n$
Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge $\rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge $\rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

Critério da Comparação (no limite):

Dadas duas séries de termos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e uma série que conhecemos de antemão $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Seja $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

Caso 1 $\rightarrow$ b_n converge

$L = 0 \rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
$0 < L < \infty \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
$L = \infty \rightarrow$ Nada pode-se afirmar

Caso 2 $\rightarrow$ b_n diverge

$L = 0 \rightarrow$ Nada pode-se afirmar
$0 < L < \infty \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge
$L = \infty \rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

Além das séries de termos positivos, temos as séries de termos alternados, definidas matematicamente por $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$. Para estudar a convergência destas, utilizamos o Critério de Leibniz.

Critério de Leibniz:

Dada uma série de termos alternados $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Se a_n for decrescente $(a_{n+1} < a_n)$ e tender à zero $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right)$, então $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.
Nomenclatura de Séries:

Dada uma série de termos quaisquer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ também converge e dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, pois converge com e sem o módulo.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge, nada podemos afirmar sobre a convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, mas $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge, então dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é parcialmente convergente ou que converge condicionalmente .

3. Séries de Potências

Uma série de potências pode ser vista como uma série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$.

Ao lidarmos com essas séries, queremos descobrir seu intervalo de convergência I. Ou seja, queremos saber para quais valores de x a série converge. A propriedade mais importante destas séries é a seguinte:

O intervalo I é sempre simétrico em relação a x_0, sendo, pelo menos, da forma $I =]x_0 - R; x_0 + R[$ onde $R \geq 0$. Neste caso, R é chamado de raio de convergência da série. Um resultado muito útil é o seguinte:

Dada uma série de potências da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$. Definimos $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$. Prova-se que $R = \frac{1}{L}$

Séries de potências que não sejam da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ precisam ser analisadas de outra forma!