estudar.com.vc

Cálculo 3

Integrais de Linha

Resumo e Exercícios P2

Integrais de Linhas de Campos Vetoriais

Calculo pelo produto escalar

Dado um campo vetorial $\vec{F}$ e uma curva γ e sua orientação, com parametrização $\gamma(t),\ a < t < b$, calculamos a integral de linha de $\vec{F}$, sobre a curva γ a partir da fórmula:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{d}r = \int_{a}^{b} \vec{F}\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)dt$$

Ao aplicar este método, basta seguir a receita:

- Identificar o campo $\vec{F}$ e a curva γ
- Parametrizar a curva γ de acordo com a orientação dada, obtendo $\gamma(t)$, com $a < t < b$
- Calcular $\vec{F}\big(\gamma(t)\big)$ e $\gamma'(t)$
- Calcular a integral $\int_{a}^{b} \vec{F}\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)dt$

Muitas vezes a integral é dada na forma $\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$, onde $\vec{F} = (P, Q, R)$

Campos Conservativos

Dado um campo $F = (P, Q, R)$, temos que:

$$rot\ F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$D.S.C \rightarrow Dominio\ simplismente\ conexo \rightarrow "sem\ furos"$

$rot\ F = 0\ e\ D.S.C \leftrightarrow F\ \text{é}\ conservativo$

$rot\ F \neq 0 \rightarrow F\ não\ \text{é}\ conservativo$

$rot\ F = 0\ e\ D.N.S.C \rightarrow F\ não\ \text{é}\ conservativo$

Propriedades de Campos Conservativos

- $F = \nabla f$, onde f é a função potencial de F
- A integral de linha entre os pontos A e B de uma curva γ vale $f(B) - f(A)$, ou seja, $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{d}r = f(B) - f(A)$
- A integral de linha sobre uma curva fechada vale 0, ou seja, $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{d}r = 0$

Teorema de Green

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{d}r = \iint_D rot\ F \cdot k\ dxdy$$

Integral de Linha → Integral Dupla

Neste caso γ é uma curva fechada e D é o interior de γ, ou seja, γ é a fronteira da região D

Só se aplica quando (ambas) as seguintes condições são obedecidas:

- Quando γ estiver orientada positivamente
- Quando D pertencer ao domínio de F

O que é orientada positivamente? As curvas que compõe uma região precisam estar orientadas da seguinte forma:

- Fronteira exterior no sentido anti-horário
- Fronteira(s) interior(es) no sentido horário

Integrais de Linhas de Campos Escalares

Cálculo das Integrais

Dado um campo escalar f e uma curva, com parametrização $\gamma(t),\ a < t < b$, calculamos a integral de linha de f, sobre a curva γ a partir da fórmula:

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)|\gamma'(t)|dt$$

Aplicações das Integrais de Campos Escalares

- Comprimento de fio

Dado um fio delgado $\gamma = \gamma(t),\ a \le t \le b$, o comprimento do fio é dado por:

$$\int_\gamma ds = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

- Massa do fio

Dado um fio delgado $\gamma = \gamma(t),\ a \le t \le b$, com densidade f, a massa do fio é dada por:

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)|\gamma'(t)|dt$$

- Centro de Massa de um fio:

Dado um fio delgado $\gamma = \gamma(t),\ \ a \leq t \leq b$, com densidade f, as coordenadas do centro de massa do fio ficam dadas por:

- $Coordenada\ x = \dfrac{\int_\gamma\ xfds}{Massa}$
- $Coordenada\ y = \dfrac{\int_\gamma\ yfds}{Massa}$
- $Coordenada\ z = \dfrac{\int_\gamma\ zfds}{Massa}$

Exercícios

1. Integrais de Linha de Campos Vetoriais – Produto Escalar

Lista 2- 2017, Questão 5 - a

Calcule $\int_\gamma\ \vec{F} \cdot \vec{d}r$, onde $F = (x^2 + y, -7yz, 2xz^2)$ e $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ ligando os pontos $(0{,}0{,}0) \to (1{,}1{,}1)$

2. Integrais de Linha de Campos Vetoriais – Produto Escalar

Lista 2- 2017, Questão 6 - b

Calcule $\int_\gamma\ \vec{F} \cdot \vec{d}r$, onde $F = 2(x + y)i + (x - y)j$ e γ é a circunferência de raio 2 centrada na origem, percorrida uma vez no sentido horário

3. Integrais de Linha de Campos Vetoriais – Produto Escalar

Lista 2- 2017, Questão 8 – c

Calcule $\int_\gamma \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy,$, onde γ é a fronteira da região limitada por $x = 0, y = 1\ e\ y = x^2$, percorrida uma vez no sentido horário

4. Integrais de Linha de Campos Vetoriais – Produto Escalar

Lista 2- 2017, Questão 8 – c

Calcule $\int_\gamma x^2dx + xdy + zdz$, onde γ é intersecção das superfícies $z = \frac{x^2}{9}$ e $z = 1 - \frac{y^2}{4}$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti-horário

5. Campos Conservativos e suas Propriedades

Lista 2- 2017, Questão 23

Os campos $F(x,y) = (x,x)\ e\ F(x,y) = (2xe^y + y)i + (x^2e^y + x - 2y)j$, são conservativos? Se sim, determine as funções potencias de cada campo.

6. Campos Conservativos e suas Propriedades

Lista 2- 2017, Questão 23

Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr}$, onde $F(x,y) = (2xe^y + y)i + (x^2e^y + x - 2y)j$, e γ é a elipse completa percorrida no sentido horário dada pela intersecção entre as superfícies $z = 3x^2 + 2y^2$ e $z = x^2 + y^2 + 1$

7. Campos Conservativos e suas Propriedades

Lista 2- 2017, Questão 23

Calcule $\int_\gamma \frac{2xy^2}{x^2+1}dx + 2y\ln(1 + x^2)\,dy$, onde γ é a elipse $4x^2 + y^2 = 1$ percorrida de $(0,1) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

8. Teorema de Green

Lista 2- 2017, Questão 10 - g

Calcule $\int_\gamma \left(xy + e^{x^2}\right)dx + \left(x^2 - \ln(1+y)\right)dy$, onde γ é o segmento de reta que liga $(0,0) \rightarrow (\pi, 0)$ e o arco $y = \sin x$, orientada no sentido horário

9. Teorema de Green

Construção do autor

Calcule $\int_\gamma \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{-x}{x^2+y^2}\,dy$, onde γ é uma circunferência qualquer centrada na origem. Em seguida calcule a mesma integral, quando γ é uma curva qualquer que enlaça a origem.

10. Integrais de Linha de Campos Escalares

Lista 2-2017, Questão 1 - c

Calcule $\int_\gamma (x - 2y^2)ds$, onde γ é o arco de parábola $y = x^2$ que liga os pontos $(-2,4) \rightarrow (1,1)$

11. Integrais de Linha de Campos Escalares – Aplicações

Lista 2-2017, Questão 2 - a

Calcule a massa de um arame cujo formato é $\gamma(t) = (2t, t^2, t^2)$, onde $0 < t < 1$ e a densidade pontual é $f(x, y, z) = x$

Exercícios de Provas:

1. Questão 1 – P2 2015

a) Calcule $\int_\gamma e^x dx + xzdy + zydz$, onde γ é a intersecção das superfícies $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e $y + x = 2$, percorrida de $(1,-1,1) \to (1,1,1)$

b) Seja $F(x,y) = \left(y^2 - 2xy, \frac{2y}{y^2+1} - x^2 + 2xy\right)$

(i) F é conservativo? Justifique

(ii) Calcule a integral de linha de F sobre $\gamma(t) = \left(t^3 - t, \sqrt{e^{x^2} - 1}\right)$, onde $0 \leq t \leq 1$

2. Questão 2 – P2 2015

Calcule $\int_\gamma (\sin x^2 - y^2)dx + (xy + y^3)dy$, onde γ é a curva $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 7$, com $x \leq 1$e percorrida no sentido anti-horário

3. Questão 3– P2 2015

Seja o campo $F(x,y) = \left(\frac{y}{(x-1)^2+4y^2}, -\frac{x-1}{(x-1)^2+4y^2}\right) + (-xy + \sin y\,, x^2 + x\cos y)$ e seja γ a fronteira da região limitada pelo gráfico das funções $y = 8 + 2x - x^2$ e $y = x^2 - 4$, percorrida no sentido horário. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{d}r$

Gabarito dos Exercícios

1. $-\frac{11}{15}$
2. π
3. $-\frac{3}{10}$
4. 6π
5. Apenas o segundo campo. $f(x,y) = x^2y + xy - y^2$
6. 0
7. 0
8. $-\pi$
9. 2π ou -2π
10. 48
11. $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$

Gabarito das Provas

1. a) $\frac{11}{30} - \frac{1}{e}$

   b) sim; 1
2. $\frac{27\pi}{2} - 66$
3. $\pi - \frac{125}{2}$