estudar.com.vc

Cálculo 1

Fuja do Nabo

Resumo e Exercícios P2

estudar.com.vc

Fórmulas e Resumo Teórico

Limites Exponenciais e Logarítmicos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad ou \quad \lim_{x\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)}{x} = \ln(a), \quad \forall\ a > 0$$

Derivadas Exponenciais e Logarítmicas importantes

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a), \qquad \forall\, a > 0$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot \ln(a)}, \qquad \forall\, a > 0$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$\left(\ln\left(f(x)\right)\right)' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot \ln(a)},$$

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(f(x)^{g(x)}\right)\cdot\left[g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)\right]'$$

Teorema do Valor Médio (TVM)

Seja uma função $f: [a, b] \to R$, contínua em todo o seu domínio. Suponhamos f derivável em $]a, b[$. O Teorema do Valor Médio (TVM) diz que, sob essas condições, existe (pelo menos um) $\boldsymbol{c} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ tal que:

$$f'(\boldsymbol{c}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

O TVM é útil para provar desigualdades e analisar o crescimento de funções.

Teorema do Valor Intermediário (TVI)

Seja uma função $f: [a, b] \to R$, contínua em todo o seu domínio. Tomemos $\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{R}$ satisfazendo a seguinte desigualdade:

$$f(a) < \boldsymbol{\gamma} < f(b)$$

O Teorema do Valor Intermediário (TVI) diz que, sob tais condições, existe (pelo menos um) $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ tal que:

$$f(\boldsymbol{c}) = \gamma$$

Isto é, existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que:

$$f(a) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) < f(b)$$

Consequência principal do TVI: **Teorema do Anulamento (de Bolzano)**

Ainda considerando uma função $f: [a, b] \to R$, contínua em todo o seu domínio, sejam a e b tais que:

$$\begin{cases} f(a) > 0 \\ f(b) < 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} f(a) < 0 \\ f(b) > 0 \end{cases}$$

Sob essas condições, pode-se afirmar que existe (pelo menos um) $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ tal que:

$$f(\boldsymbol{c}) = 0$$

Pontos Extremantes: Máximos e Mínimos

<u>Pontos de máximo local</u>
Pontos que maximizam uma função em um dado intervalo.

<u>Pontos de mínimo local</u>
Pontos que minimizam uma função em um dado intervalo.

<u>Pontos de máximo global</u>
Pontos que maximizam uma função em todo o seu domínio.

<u>Pontos de mínimo global</u>
Pontos que minimizam uma função em todo o seu domínio.

Para todo e qualquer ponto $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ que seja extremante (máximo ou mínimo local ou global) de uma função f, vale que:

$$f'(\boldsymbol{a}) = 0 \quad (x = a \text{ é um } \textbf{ponto crítico})$$

Pontos Críticos

Um ponto $x = c$ é ponto crítico de uma função $f(x)$ se, e somente se, $f'(c) = 0$.

$$\boldsymbol{f'(c) = 0 \leftrightarrow x = c} \textbf{ é ponto crítico}$$

Em outras palavras:

"Se $x = c$ é ponto crítico de uma função $f(x)$, o coeficiente angular da reta $\boldsymbol{t}$, tangente ao gráfico de f no ponto $x = c$, que é dado por $f'(c)$, vale zero, isto é: **a reta $\boldsymbol{t}$ é horizontal**."

Graficamente, pode-se dizer que os pontos para os quais $f'(x) > 0$ são os pontos em que f é crescente. Já os pontos para os quais $f'(x) < 0$ são os pontos nos quais f é decrescente.

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \rightarrow \ f \text{ é crescente} \\ f'(x) < 0 \rightarrow \ f \text{ é decrescente} \end{cases}$$

Pontos de Inflexão

Pontos de inflexão são pontos nos quais a derivada segunda de uma função vale zero. Além disso, se $x = c$ é ponto de inflexão, então $f''(c) = 0$.

$$\boldsymbol{f''(c) = 0 \ \leftrightarrow x = c} \textbf{ é ponto de inflexão}.$$

Graficamente, os pontos de inflexão são os pontos em que a **concavidade** do gráfico da função se altera. Além disso, os pontos para os quais $f''(x) > 0$ são pontos em que a concavidade da função f é voltada para cima. Já os pontos para os quais $f''(x) < 0$ são os pontos em que a concavidade da função f é voltada para baixo.

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \rightarrow \ \text{concavidade voltada para cima} \\ f''(x) < 0 \rightarrow \ \text{concavidade voltada para baixo} \end{cases}$$

Teorema de Weierstrass

Seja $f: I \subset R \rightarrow R$ uma função contínua no **intervalo fechado** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \boldsymbol{I}$. O Teorema de Weierstrass afirma que, sob essas condições, existem $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ pertencentes a $[a, b]$, tais que:

$$\boldsymbol{f(x_1) < f(x) < f(x_2), \ \ \forall \, x \in [a, b]}$$

Em outras palavras:

“Se a função f for **contínua no intervalo fechado** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$**,** existem x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo tais que $\boldsymbol{f(x_1)}$ **é o valor mínimo de** $\boldsymbol{f}$ em $[a, b]$ e $\boldsymbol{f(x_2)}$ **é o valor máximo de** $\boldsymbol{f}$ em $[a, b]$.”

Ou ainda:

“Se a função f for **contínua no intervalo fechado** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$**,** existem pontos de máximo e mínimo nesse intervalo: $\boldsymbol{x_1}$ **é ponto de mínimo local** de f e $\boldsymbol{x_2}$ **é ponto de máximo local** de f.”

No caso em que a função $f: I \subset R \to R$ é contínua em todo o seu domínio I e este domínio é um **intervalo fechado** $[a, b]$, pode-se assegurar que existe (pelo menos um) **ponto de máximo global** de f e (pelo menos um) **ponto de mínimo global** de f.

Regra de L’Hospital

Caso o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

seja uma indeterminação do tipo "$0/0$" ou "$\pm\infty/\infty$", podemos escrever, pela Regra de L’Hospital, que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Cuidado:</u> *não confundir com a Regra do Quociente.*

Assíntotas

Uma assíntota é uma reta da qual os pontos do gráfico de uma função se aproximam, mas nunca chegam a “tocá-la”. Podemos definir a assíntota de uma função $f(x)$ como uma reta da forma $\boldsymbol{y = mx + n}$, tal que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$$

De modo geral, analisamos as assíntotas à esquerda ($x \to -\infty$) do gráfico de f e assíntotas à direita ($x \to +\infty$) do gráfico de f. Assim:

Para assíntotas à esquerda

$$\boldsymbol{m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{n = \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx}$$

Para assíntotas à direita

$$\boldsymbol{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{n = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx}$$

Note que encontrar n depende de encontrar m. Assim, para encontrar os valores de m e n das respectivas assíntotas, devemos, primeiramente, encontrar m e, em seguida, encontrar n. Vale ressaltar que **$\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ devem ser números reais**.

Esboço de Gráficos

Para esboçar gráficos, o seguinte roteiro técnico pode ser útil:

(i) Encontrar o domínio da função;
(ii) Estudar o crescimento da função por meio de sua derivada primeira;
(iii) Estudar a concavidade da função por meio de sua derivada segunda;
(iv) Encontrar as assíntotas da função;
(v) Encontrar os limites da função nos extremos de seu domínio;
(vi) Calcular a função em alguns pontos relevantes (geralmente pontos nos quais ocorreu estudo de sinal).

Polinômio de Taylor

Polinômio de Taylor é o polinômio de grau n que **melhor aproxima uma função** ao redor de um ponto $x = a$ interior ao seu domínio. Sua definição é a seguinte:

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ou

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

Nessa notação, $f^{(n)}(x)$ denota a derivada de ordem n da função $f(x)$. Além disso, note que n é o grau do Polinômio de Taylor correspondente.

<u>Observações:</u>

1) A função que o Polinômio de Taylor de ordem n pretende aproximar deve ser derivável até ordem n;
2) Quanto maior for a ordem do Polinômio de Taylor, maior será a precisão da aproximação.

Teorema de Taylor

<u>Resto de Lagrange:</u> é uma função $R(x)$ tal que:

$$R(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$$

A função Resto de Lagrange indica a diferença entre a função f e o seu Polinômio de Taylor de ordem n.

<u>Teorema de Taylor:</u> Seja uma função $f: I \subset R \to R$, derivável até ordem $(n+1)$ e $x = a \in I$. O erro ϵ da aproximação da função $f(x)$ usando um Polinômio de Taylor de ordem n ao redor do ponto $x = a$ é tal que:

$$\boldsymbol{\epsilon = |R(x)| = |f(x) - P_{n,a}(x)|}$$

Além disso, pode-se demonstrar que:

$$\epsilon = \left| \frac{f^{(n+1)}(\boldsymbol{c})}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \right|$$

Nesse caso, o ponto $x = c$ é um ponto que está **entre $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{x}$**.

Exercícios de Aula – Fuja do Nabo

1. Limites Exponenciais e Logarítmicos

P2 2012

Calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 1^-} (2-x)^{tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

2. Limites Exponenciais e Logarítmicos

P2 2013

Calcule, caso exista:

$$\lim_{x\to 0} (3x+\cos x)^{\frac{1}{sen(35x)}}$$

3. Derivadas Exponenciais e Logarítmicas

P2 2016 - Modificada

Calcule derivada da função $f\colon R \to R$ dada por $f(x) = (1+\cos^2(x))^{e^{3x}}$

4. Teorema do Valor Médio (TVM)

P2 2014

Mostre que $\frac{\arctan(x)}{x} \leq 1$, para todo $x > 0$.

5. Teorema do Valor Médio (TVM)

P2 2012

Sejam a e b, com $1 \leq a < b \leq e$. Prove que $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} \leq \frac{1}{a^2}(b-a)$.

6. Polinômio de Taylor

Item a) - P3 2015

Seja $n \geq 1$ um inteiro. Determine $P_n(x)$ o Polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^{2x}$ em torno do ponto $x_0 = 0$. Obtenha uma expressão para o erro $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, em que $x \in R$.

7. Polinômio de Taylor

P2 2016

Use o Polinômio de Taylor, da função $f(x) = \cos(x)$, em torno de $x_0 = 0$, de menor grau possível, para obter uma aproximação de $\cos(0{,}1)$ com erro inferior a 10^{-5}.

8. Pontos de Máximo e Mínimo

P2 2016 - Modificada

Seja $f(x) = e^{2x^3-3x^2-12x}$ definida no intervalo fechado $[-3; 3]$. Se a é o valor máximo de f e b é o valor mínimo de f, determine o produto ab.

9. Problemas de Otimização

P2 2016 - Modificada

Considere todos os triângulos retângulos formados pelos semi-eixos positivos e por uma reta que passa pelo ponto $(2, 3)$. Dentre todos esses triângulos, determine a hipotenusa daquele que possui área mínima.

10. Esboço de Gráficos

P2 2016

Considere a função $f: R \to R$ dada por $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot (x-2)^2$.

a) Determine os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente. Determine os pontos de máximo e mínimo locais de f.

b) Determine os intervalos onde f possui concavidade para cima e também onde possui concavidade para baixo. Determine os pontos de inflexão de f.

c) Calcule os limites pertinentes e discuta a existência de assíntotas.

d) Esboce o gráfico de f.

Gabarito

1. O limite é igual a $e^{\frac{2}{\pi}}$.

2. O limite é igual a $e^{\frac{3}{35}}$.

3. A derivada é igual a

$$f'(x) = (1+\cos^2(x))^{e^x} \cdot \left(e^x \cdot \ln(1+cos^2(x)) - \frac{2e^x \cdot sen(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)}\right)$$

4. Demonstração.

5. Demonstração.

6. O Polinômio de Taylor é $P_{n,0} = 1 + 2x + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{(2^3x^3)}{3!} + \cdots + \frac{2^nx^n}{n!}$.

7. A aproximação é $1 - \frac{(0,1)^2}{2!}$.

8. O produto ab é igual a e^{-38}.

9. A hipotenusa é igual a $\sqrt{52}$.

10. a) f é crescente em $]0;\frac{1}{2}[\ \cup\ ]2;+\infty[$ e decrescente em $]-\infty;0[\ \cup\ ]2;+\infty[$. Além disso, $x = 0$ e $x = 2$ são pontos de mínimo local e $x = \frac{1}{2}$ é ponto de máximo local.

b) f possui concavidade voltada pra cima em $]-\infty;\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{10}[\ \cup\ ]\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{10};+\infty[$ e concavidade voltada pra baixo em $]\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{10};\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{10}[$.

Além disso, $x=\frac{1}{2}\pm\frac{3\sqrt{5}}{10}$ são pontos de inflexão de f.

c) Não há assíntotas.

d) Gráfico.