



www.estudar.com.vc

Física

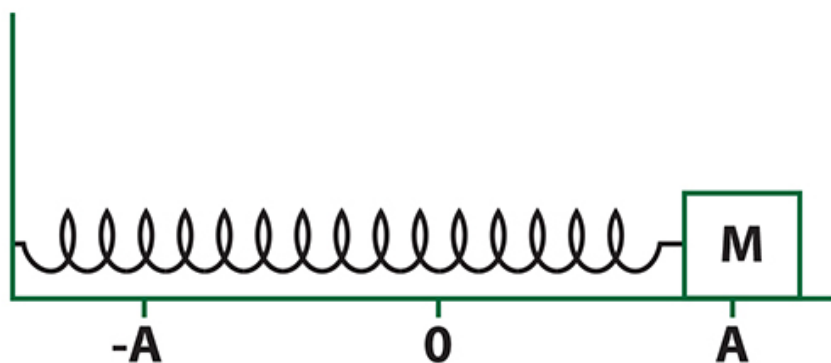
Oscilações





1. Movimento Harmônico Simples

Vamos analisar inicialmente a situação em que há um corpo de massa m , preso a uma mola de constante elástica K que realiza oscilações em torno de seu ponto de equilíbrio em $x = 0$, sem a ação de qualquer agente externo ou atrito.



Para **pequenas perturbações** em torno da origem ($-A \leq x \leq A$) a força que age sobre o corpo é linear e dada pela Lei de Hooke ($-kx$) e tal força tem **caráter restaurador**, ou seja, tenda a fazer com que o corpo retorne para a posição de equilíbrio.

Na imagem, **A** representa a amplitude das oscilações do movimento, sendo que essa grandeza representa o maior deslocamento possível a partir da posição de equilíbrio.

Com isso, pode-se escrever a segunda lei de Newton para o corpo:



$$ma = -kx$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A solução geral da equação diferencial descrita acima é do tipo:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

Sendo A e ϕ determinados pelas condições iniciais do movimento harmônico simples.

A grandeza física ω representa a frequência angular de oscilação, sendo:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Onde:

T (s) = período de oscilação do movimento, ou seja, tempo para completar 1 ciclo, caso o movimento se inicie em $-A$ deve retornar a $-A$ para completar 1 ciclo.

f (Hz) = número de ciclos por unidade de tempo que o movimento executa

$$1 \text{ Hz} = 1 \frac{\text{ciclo}}{\text{segundo}}$$

ω = frequência angular, dada em rad/s .



2. Determinação de A e ϕ_0

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos(\omega t + \phi_0) \\v(t) = \dot{x}(t) &= -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) \\a(t) = \ddot{x}(t) &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi_0)\end{aligned}$$

São dados que a posição no instante zero $x(0) = x_0$ e a velocidade no instante inicial é $v(0) = v_0$, assim :

$$\phi_0 = -\arctan\left(\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

3. Energia no MHS

Nosso sistema conservativo terá 2 tipos de energia: a energia cinética K e a energia potencial elástica da mola U , a energia E será a soma dessas duas energias e representará a energia total no sistema.

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \left(\frac{mA^2\omega^2}{2}\right) \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

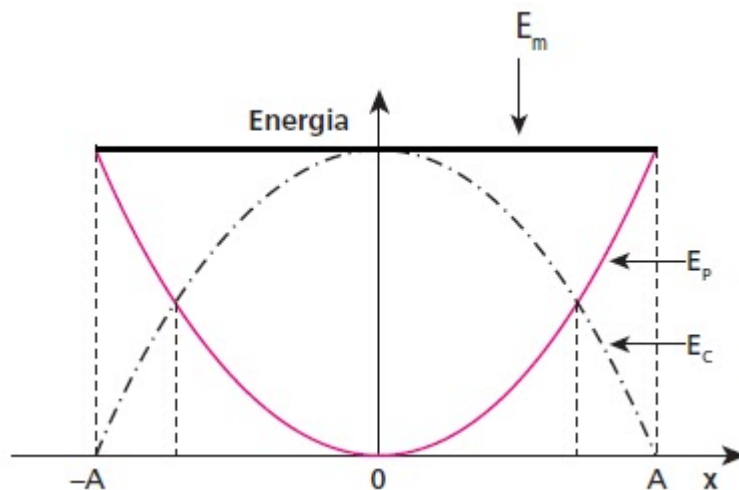
$$U = \frac{Kx^2}{2} = \left(\frac{KA^2}{2}\right) \cos^2(\omega t + \phi_0)$$

$$U = \frac{Kx^2}{2} = \left(\frac{KA^2}{2}\right) \cos^2(\omega t + \phi_0)$$



$$K = m\omega^2$$
$$E = U + K = \frac{KA^2}{2}$$

A energia total no movimento harmônico simples é constante, isso decorre do fato do sistema ser conservativo.



Na imagem E_m representa a energia total do sistema, E_p representa a energia potencial elástica e E_c representa a energia cinética.

Por conservação de energia a **velocidade máxima** ocorrerá quando $x = 0$, onde a energia potencial elástica é nula, e terá o valor (em módulo):

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{KA^2}{2}$$
$$v_{max} = \sqrt{\frac{K}{m}} * A$$

Como a aceleração $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$, temos que o módulo do máximo da aceleração será $\omega^2 |x_{max}(t)|$, assim a aceleração máxima será:



$$|\ddot{x}_{max}(t)| = \omega^2 A = \frac{K}{m} A$$

O sistema massa-mola é apenas um dos sistemas que executam um movimento harmônico simples. De forma genérica, todos os movimentos unidimensionais cujas perturbações possam ser supostas pequenas em torno de um ponto de equilíbrio e nas quais as equações dinâmicas sejam da “forma” do sistema massa-mola podem ser tratados como movimentos harmônicos simples.

4. Pêndulo de Torção

O pêndulo de torção será formado por um corpo apoiado em um plano ou suspenso por um fio. Ao perturbarmos o corpo diz-se que o fio reage com um torque restaurador proporcional ao ângulo de torção, assim:

$$\tau = -K \varphi$$

Onde K é o módulo de torção do fio que depende de seu comprimento, diâmetro e material.

Aplicando a equação do movimento, tem-se:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -K \varphi$$

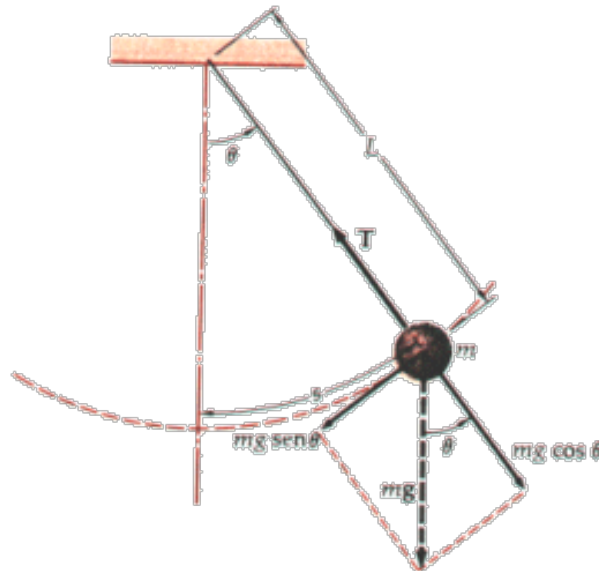
Usando a mesmo procedimento que o utilizado com o sistema massa-mola a frequência angular do pêndulo de torção será:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}} \quad e \quad \varphi(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$



5. Pêndulo Simples

No pêndulo simples há uma massa m colocada em um fio de comprimento l . A equação diferencial que caracterizará o movimento harmônico simples será obtida através da decomposição das forças no eixo radial e tangencial.



$$\begin{aligned} -mg \sin \theta &= m a \\ v &= L \dot{\theta} \text{ então } a = L \ddot{\theta} \\ -mg \sin \theta &= mL \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

Essa equação só apresenta um MHS se $\theta \ll 1 \text{ rad}$, pois podemos usar a aproximação que $\sin \theta \approx \theta$, logo:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

Cuja solução será do tipo:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi_0) \text{ com } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Energia no Pêndulo simples

A energia no pêndulo simples, assim como no oscilador massa-mola, será dada pela soma da energia cinética com a energia potencial. Nesse caso essas energias podem ser expressas em termos da função $\theta(t)$ da seguinte forma:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (L\dot{\theta})^2 = \frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2}$$

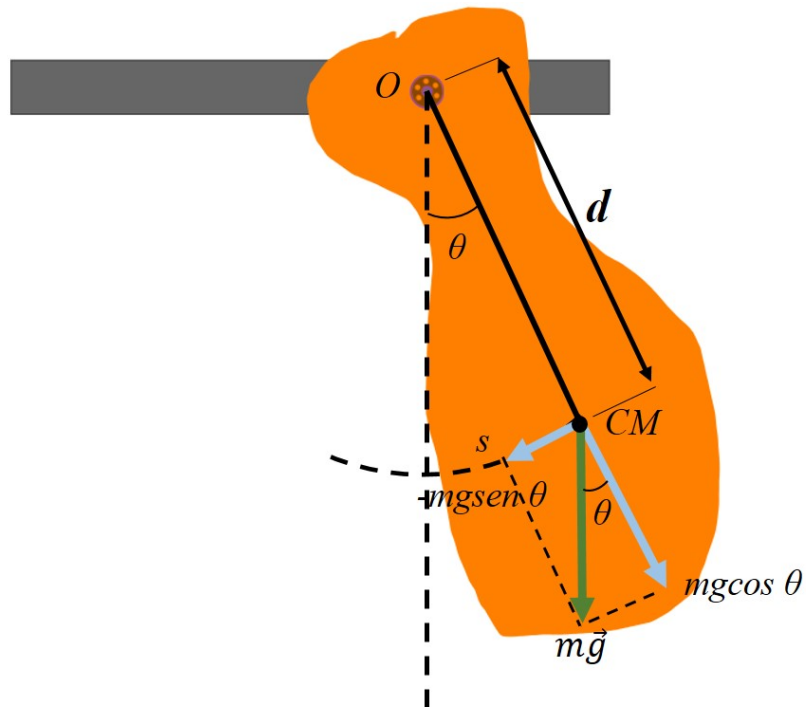
$$U = mgL (1 - \cos \theta)$$

Para $\theta \ll 1$ pode-se escrever que $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$U = \frac{mgL\theta^2}{2}$$

6. Pêndulo Físico

Trata-se de um pêndulo real onde a massa do corpo não é mais concentrada em um único ponto, como no caso do pêndulo simples, mas sim distribuída ao longo de toda a extensão do corpo, assim, a análise será baseada na utilização do momento de inércia do corpo.



O torque é dado por $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, a decomposição da força peso como na figura nos fornece um torque resultante igual a:

$$-mgd \sin \theta$$

Logo, tem-se:

$$-mgd \sin \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \sin \theta = 0$$

Novamente, utilizando a aproximação $\sin \theta \approx \theta$, obtém-se:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(\frac{mgd}{I} \right) \theta = 0$$



Por analogia pode-se escrever que:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

7. Associação de Molas.

Quando duas ou mais molas ($K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$) são associadas em série ou em paralelo, sua constante elástica resultante (K_r) será dada por:

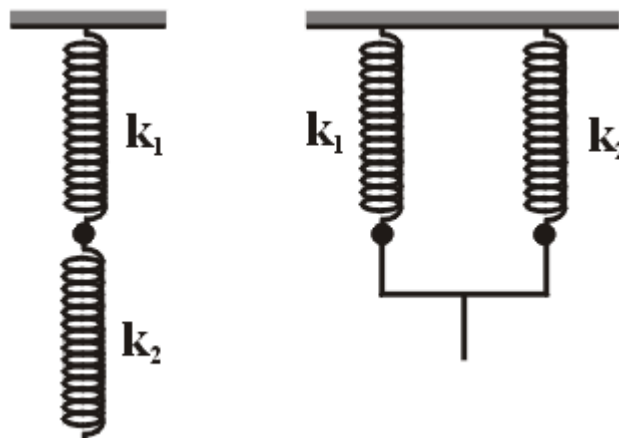
Molas em série:

$$\frac{1}{K_r} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \dots + \frac{1}{K_n}$$

Molas em paralelo:

$$K_r = K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_n$$

Exemplo de associação de molas: A mola da esquerda representa associação em série enquanto a da direita representa a associação de molas em paralelo

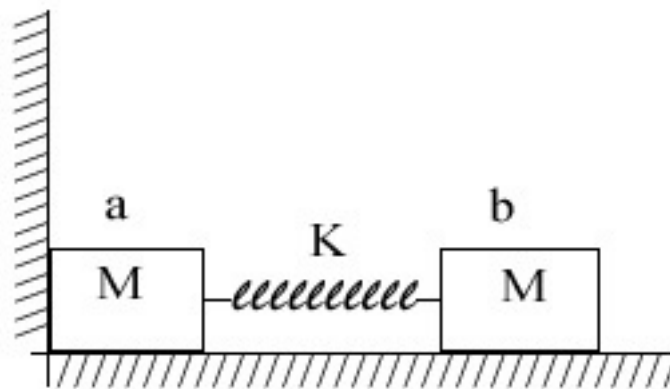




8. Oscilações Acopladas

As oscilações acopladas correspondem à dinâmicas de movimentos harmônicos simples em que o movimento de uma partícula influencia no movimento da outra.

Por exemplo:



Nesse caso simplificado, em que há apenas duas partículas unidas por uma mola pode-se usar o conceito de **massa reduzida** (μ) para resolver o problema, bastando substituir a massa m do sistema massa mola pela massa reduzida μ . O valor de μ será dado por:

$$\mu = \frac{m_a * m_b}{m_a + m_b}$$

Assim, a frequência angular ω no MHS será:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$$