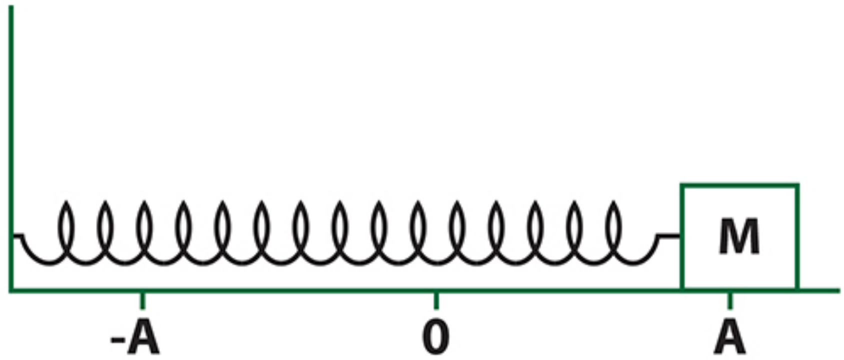
www.estudar.com.vc

Física

Oscilações

1. Movimento Harmônico Simples

Vamos analisar inicialmente a situação em que há um corpo de massa m, preso a uma mola de constante elástica K que realiza oscilações em torno de seu ponto de equilíbrio em $x = 0$, sem a ação de qualquer agente externo ou atrito.



Para **pequenas perturbações** em torno da origem $(-A \leq x \leq A)$ a força que age sobre o corpo é linear e dada pela Lei de Hooke $(-kx)$ e tal força tem **caráter restaurador**, ou seja, tenda a fazer com que o corpo retorne para a posição de equilíbrio.

Na imagem, **A** representa a amplitude das oscilações do movimento, sendo que essa grandeza representa o maior deslocamento possível a partir da posição de equilíbrio.

Com isso, pode-se escrever a segunda lei de Newton para o corpo:

$$ma = -kx$$
$$m\ddot{x} = -kx$$
$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A solução geral da equação diferencial descrita acima é do tipo:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

Sendo A e ϕ determinados pelas condições iniciais do movimento harmônico simples.

A grandeza física ω representa a frequência angular de oscilação, sendo:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Onde:

$T\ (s) =$ período de oscilação do movimento, ou seja, tempo para completar 1 ciclo, caso o movimento se inicie em $-A$ deve retornar a $-A$ para completar 1 ciclo.

$f\,(Hz)$ = número de ciclos por unidade de tempo que o movimento executa

$$1\ Hz = 1\,\frac{ciclo}{segundo}$$

ω = frequência angular, dada em rad/s.

2. Determinação de A e ϕ_0

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$
$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi_0)$$
$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi_0)$$

São dados que a posição no instante zero $x(0) = x_0$ e a velocidade no instante inicial é $v(0) = v_0$, assim :

$$\phi_0 = -\arctan\left(\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

3. Energia no MHS

Nosso sistema conservativo terá 2 tipos de energia: a energia cinética K e a energia potencial elástica da mola U, a energia E será a soma dessas duas energias e representará a energia total no sistema.

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \left(\frac{mA^2\omega^2}{2}\right)\sin^2(\omega t + \phi_0)$$

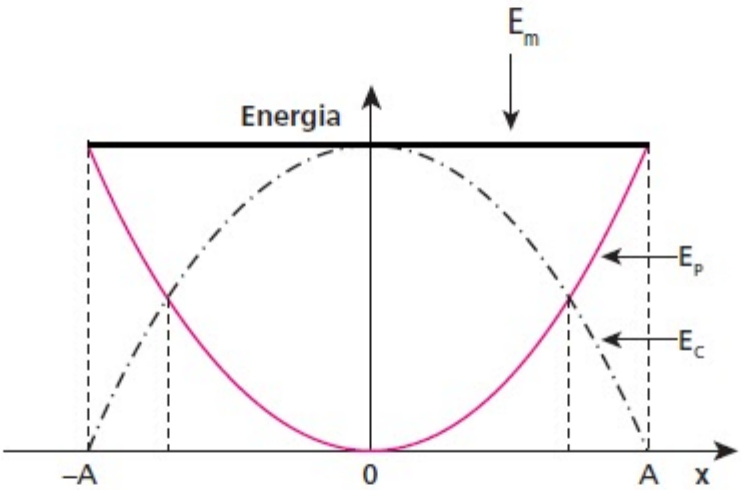
$$U = \frac{Kx^2}{2} = \left(\frac{KA^2}{2}\right)\cos^2(\omega t + \phi_0)$$

$$U = \frac{Kx^2}{2} = \left(\frac{KA^2}{2}\right)\cos^2(\omega t + \phi_0)$$

$$K = m\omega^2$$

$$E = U + K = \frac{KA^2}{2}$$

A energia total no movimento harmônico simples é constante, isso decorre do fato do sistema ser conservativo.



Na imagem E_m representa a energia total do sistema, E_p representa a energia potencial elástica e E_c representa a energia cinética.
Por conservação de energia a **velocidade máxima** ocorrerá quando x = 0, onde a energia potencial elástica é nula, e terá o valor (em módulo):

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{KA^2}{2}$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{K}{m}} * A$$

Como a aceleração $\ddot{x}(t) = -\omega^2\, x(t)$, temos que o módulo do máximo da aceleração será $\omega^2\, |x_{max}(t)|$, assim a aceleração máxima será:

$$|\ddot{x}_{max}(t)| = \omega^2 A = \frac{K}{m} A$$

O sistema massa-mola é apenas um dos sistemas que executam um movimento harmônico simples. De forma genérica, todos os movimentos unidimensionais cujas perturbações possam ser supostas pequenas em torno de um ponto de equilíbrio e nas quais as equações dinâmicas sejam da “forma” do sistema massa-mola podem ser tratados como movimentos harmônicos simples.

4. Pêndulo de Torção

O pêndulo de torção será formado por um corpo apoiado em um plano ou suspenso por um fio. Ao perturbarmos o corpo diz-se que o fio reage com um torque restaurador proporcional ao ângulo de torção, assim:

$$\tau = -K\,\varphi$$

Onde K é o módulo de torção do fio que depende de seu comprimento, diâmetro e material.
Aplicando a equação do movimento, tem-se:

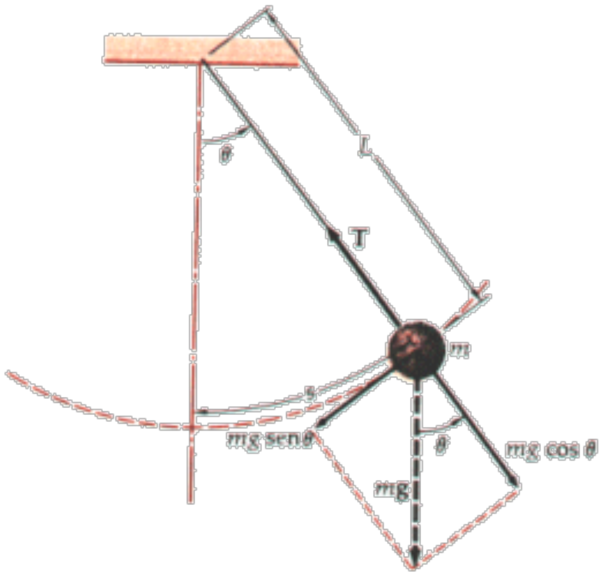
$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -K\,\varphi$$

Usando a mesmo procedimento que o utilizado com o sistema massa-mola a frequência angular do pêndulo de torção será:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}} \qquad e \qquad \varphi(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

5. Pêndulo Simples

No pêndulo simples há uma massa m colocada em um fio de comprimento l. A equação diferencial que caracterizará o movimento harmônico simples será obtida através da decomposição das forças no eixo radial e tangencial.



$$-mg\sin\theta = m\,a$$

$$v = L\,\dot{\theta}\ então\ a = L\,\ddot{\theta}$$

$$-mg\sin\theta = mL\,\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Essa equação só apresenta um MHS se $\theta \ll 1\,rad$, pois podemos usar a aproximação que $\sin\theta \approx \theta$,logo:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Cuja solução será do tipo:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)\ \ com\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Energia no Pêndulo simples

A energia no pêndulo simples, assim como no oscilador massa-mola, será dada pela soma da energia cinética com a energia potencial. Nesse caso essas energias podem ser expressas em termos da função $\theta(t)$ da seguinte forma:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(L\dot{\theta}\right)^2 = \frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2}$$

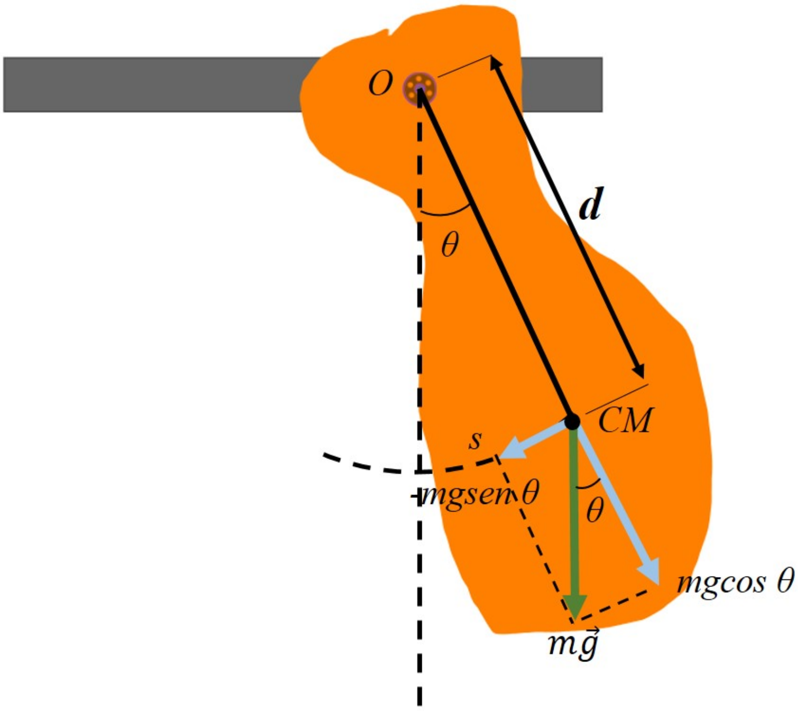
$$U = mgL\,(1 - \cos\theta)$$

Para $\theta \ll 1$ pode-se escrever que $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$U = \frac{mgL\theta^2}{2}$$

6. Pêndulo Físico

Trata-se de um pêndulo real onde a massa do corpo não é mais concentrada em um único ponto, como no caso do pêndulo simples, mas sim distribuída ao longo de toda a extensão do corpo, assim, a análise será baseada na utilização do momento de inércia do corpo.



O torque é dado por $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, a decomposição da força peso como na figura nos fornece um torque resultante igual a:

$$-mgd \sin \theta$$

Logo, tem-se:

$$-mgd \sin \theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \sin \theta = 0$$

Novamente, utilizando a aproximação $\sin \theta \approx \theta$, obtém-se:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgd}{I}\right) \theta = 0$$

Por analogia pode-se escrever que:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

7. Associação de Molas.

Quando duas ou mais molas $(K_1, K_2, K_3, \dots, K_n)$ são associadas em série ou eu paralelo, sua constante elástica resultante (K_r) será dada por:

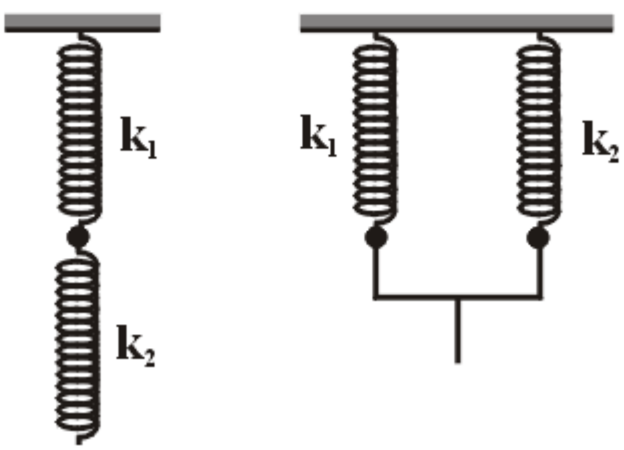
Molas em série:

$$\frac{1}{K_r} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \cdots + \frac{1}{K_n}$$

Molas em paralelo:

$$K_r = K_1 + K_2 + K_3 + \cdots + K_n$$

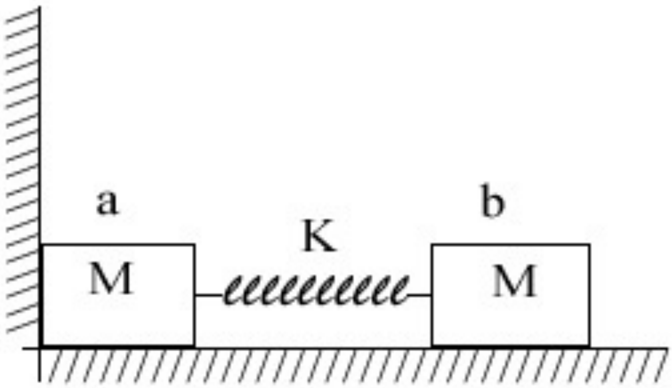
Exemplo de associação de molas: A mola da esquerda representa associação série enquanto a da direita representa a associação de molas em paralelo



8. Oscilações Acopladas

As oscilações acopladas correspondem à dinâmicas de movimentos harmônicos simples em que o movimento de uma partícula influencia no movimento da outra.

Por exemplo:



Nesse caso simplificado, em que há apenas duas partículas unidas por uma mola pode-se usar o conceito de **massa reduzida** (μ) para resolver o problema, bastando substituir a massa m do sistema massa mola pela massa reduzida μ . O valor de μ será dado por:

$$\mu = \frac{m_a * m_b}{m_a + m_b}$$

Assim, a frequência angular ω no MHS será:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$$