estudar.com.vc

Cálculo 4

Sequências e Séries

Fuja do Nabo – P1

Resumo da Teoria

1. Sequências numéricas

Uma sequência numérica pode ser definida como um conjunto de números que obedecem uma certa “regra”. Essa “regra” é chamada de lei de formação da sequência.

$1, 2, 4, 8 \ldots \rightarrow a_n = 2^n \rightarrow$ Lei de formação da sequência

Uma propriedade importante das sequências é sua convergência. Define-se:

Se $\lim_{n \to \infty} a_n = L \rightarrow\ a_n$ converge para L. Caso contrário, a_n diverge.

<u>Teorema da Sequência Monótona:</u>

Dada uma sequencia a_n:

Se a_n for crescente $(a_{n+1} > a_n)$ e limitada superiormente $a_n \leq M, M \in R$, então a_n é convergente.

Se a_n for decrescente $(a_{n+1} < a_n)$ e limitada inferiormente $a_n \geq M, M \in R$, então a_n é convergente.

2. Séries Numéricas

Uma série pode ser definida matematicamente como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Assim, a série é simplesmente a soma de todos os termos de uma dada sequência a_n.

Sendo a série um somatório, este somatório pode tanto convergir como divergir. Ou seja, a soma pode estourar para infinito ou tender até um certo número. Existem critérios que nos ajudam a determinar a convergência de uma série.

Critério do Termo Geral:

Dada uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Vale ressaltar que este critério vale para **qualquer** série. Outros critérios, como os próximos quatro, funcionam apenas para séries de termos positivos.

Critério da Raiz:

Dada uma série de termos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Seja $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

$L > 1 \to$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge
$L < 1 \to$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
$L = 1 \to$ Nada podemos afirmar

Critério da Razão:

Dada uma série de termos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Seja $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$L > 1 \to$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge
$L < 1 \to$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
$L = 1 \to$ Nada podemos afirmar

Critério da Integral:

Dada uma série de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com a_n obedecendo as seguintes propriedades:

$\to$ a_n é decrescente
$\to$ O termo de geral de a_n vai à zero $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$

Definimos uma função $f(x)$ de tal forma que $f(n) = a_n$

Se $\int_1^\infty f(x)dx$ converge $\rightarrow$ $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge

Se $\int_1^\infty f(x)dx$ diverge $\rightarrow$ $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverge

Critério da Comparação (no limite):

Dadas duas séries de termos positivos $\sum_{n=0}^\infty a_n$ e uma série que conhecemos de antemão $\sum_{n=0}^\infty b_n$. Seja $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

Caso 1 → b_n converge

$L = 0 \rightarrow$ $\sum_{n=0}^\infty a_n$ converge
$0 < L < \infty \rightarrow \sum_{n=0}^\infty a_n$ converge
$L = \infty \rightarrow$ Nada pode-se afirmar

Caso 2 → b_n diverge

$L = 0 \rightarrow$ Nada pode-se afirmar
$0 < L < \infty \rightarrow \sum_{n=0}^\infty a_n$ diverge
$L = \infty \rightarrow$ $\sum_{n=0}^\infty a_n$ diverge

Além das séries de termos positivos, temos as séries de termos alternados, definidas matematicamente por $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n$. Para estudar a convergência destas, utilizamos o Critério de Leibniz.

Critério de Leibniz:

Dada uma série de termos alternados $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n$.

Se a_n for decrescente $(a_{n+1} < a_n)$ e tender à zero $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$, então $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n$ converge.

Nomenclatura de Séries:

Dada uma série de termos quaisquer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ também converge e dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, pois converge com e sem o módulo.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge, nada podemos afirmar sobre a convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, mas $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge, então dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é parcialmente convergente ou que converge condicionalmente .

3. Séries de Potências

Uma série de potências pode ser vista como uma série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$.

Ao lidarmos com essas séries, queremos descobrir seu intervalo de convergência I. Ou seja, queremos saber para quais valores de x a série converge. A propriedade mais importante destas séries é a seguinte:

O intervalo I é sempre simétrico em relação a x_0, sendo, pelo menos, da forma $I =]x_0 - R; x_0 + R[$ onde $R \geq 0$. Neste caso, R é chamado de raio de convergência da série. Um resultado muito útil é o seguinte:

Dada uma série de potências da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$. Definimos $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$. Prova-se que $R = \frac{1}{L}$

Séries de potências que não sejam da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ precisam ser analisadas de outra forma!

Exercícios

1. Sequências numéricas

Lista P1 – 2017, Questão III

Decida se cada uma das séries abaixo é convergente ou divergente, calculando seu limite no caso de convergente.

a) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \dots$

b) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}$

c) $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$

d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

e) $a_n = \frac{2n+\sin n}{5n+1}$

f) $a_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$

g) $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$

h) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

i) $a_n = \frac{\ln n}{n}$

j) $a_n = \sqrt[n]{n}$

k) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

l) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

m) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+11}\right)^n$

2. Séries Numéricas de termos positivos

Lista P1 – 2017, Questão XII

É convergente ou divergente? Justifique!

a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n^2-4}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos\frac{1}{n}$

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$

j) $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$

3. Séries Alternadas

Lista P1 – 2017, Questão XIII

Decidir se a série converge absolutamente, condicionalmente ou diverge

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(\ln n)^2}$

d) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

4. Séries de Potências

Lista P1 – 2017, Questão XVI

Determine o máximo intervalo de convergência de cada uma das séries de potência abaixo:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-5)^n}{n3^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(2n)!}\,(x-7)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

Gabarito:

1.

a) **Converge para 1**
b) **Diverge**
c) **Converge para $\frac{1}{4}$**
d) **Converge para 0**
e) **Converge para $\frac{2}{5}$**
f) **Converge para 0**
g) **Converge para e**
h) **Converge para 0**
i) **Converge para 0**
j) **Converge para 1**
k) **Diverge**
l) **Converge para 1**
m) **Converge para 0**

2.

a) **Diverge**
b) **Converge**
c) **Converge**
d) **Diverge**
e) **Diverge**
f) **Diverge**
g) **Converge**
h) **Converge**

i) **Diverge**
j) **Diverge**
k) **Diverge**

3.

a) **Condicionalmente**
b) **Condicionalmente**
c) **Absolutamente**
d) **Diverge**
e) **Diverge**

4.

a) $[-4, 4]$
b) $\{0\}$
c) $]2, 8]$
d) $x \in R$
e) $[-2, 0]$