www.estudar.com.vc

P3 2016.1 Adaptada FEI

Exercício 2 Função Inversa

Resolução

2. Determine um domínio, o mais amplo possível, no qual $f(x) = x^2 - x - 2$ seja invertível, determine $f^{-1}(x)$ e esboce os gráficos de f e f^{-1}no mesmo plano cartesiano, indicando domínio e imagem.

Para uma função ser invertível, ela deve ser **bijetora**, ou seja, ela deve **injetora** e **sobrejetora**.

Relembrando alguns conceitos, uma função é **injetora** quando **cada ponto do contradomínio** está associado a **apenas um elemento do domínio**. Uma função é **sobrejetora** quando **todos os pontos do contradomínio** estão associados a **pelo menos um ponto do domínio**.

A função f dada é um polinômio do segundo grau, cujo gráfico é uma **parábola**. Essa parábola sempre é simétrica em relação à reta vertical que passa por seu vértice.

Então, para esboçar a parábola, vamos determinar as coordenadas do **vértice**. Sabemos que nesse ponto a tangente à parábola é horizontal, ou seja, a derivada de f se anula.

$$f'(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

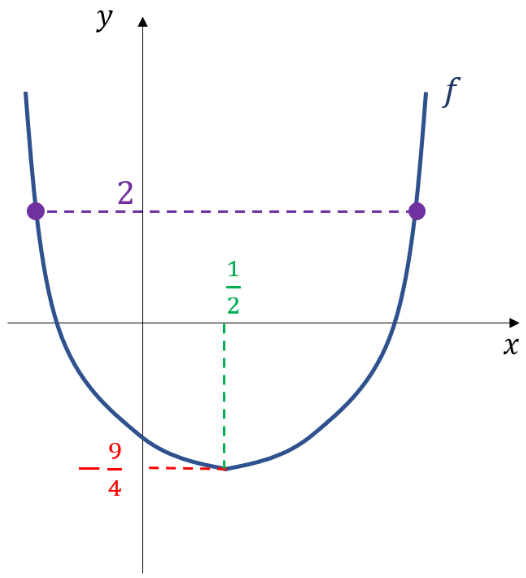
Logo, o vértice tem abscissa $x_v = 1/2$. Sua ordenada é dada por:

$$y_v = f(x_v) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

Além disso, a **concavidade é voltada para cima** porque a segunda derivada de f é sempre positiva:

$$f''(x) = 2 > 0$$

A parábola possui, então, o seguinte aspecto:



Baseado nisso, vamos impor as restrições ao domínio e ao contradomínio de f para garantir sua **inversibilidade**.

Como a parábola é simétrica em relação à reta vertical $y = \frac{1}{2}$ que passa pelo vértice, qualquer valor do contradomínio acima de $\frac{1}{2}$ é imagem de dois pontos do domínio. Veja na figura, por exemplo, para $y = 2$.

Assim, para assegurar que f seja injetora, devemos tomar como domínio apenas um dos lados em torno do vértice. Podemos escolher, então:

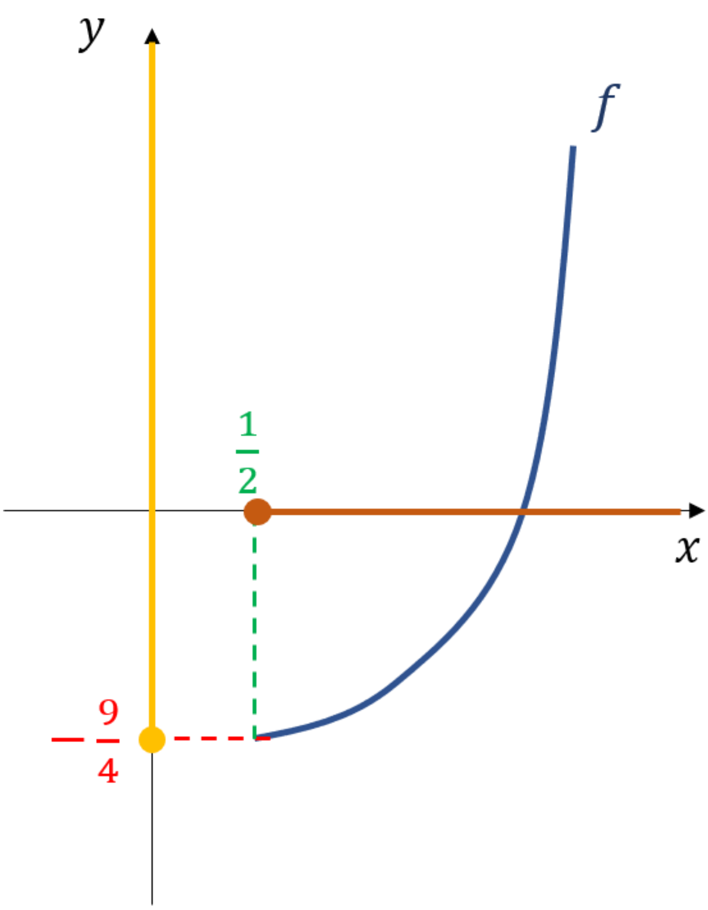
$$D(f) = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Para que f seja **sobrejetora**, o contradomínio deve coincidir com a imagem de f. Note que, para $y < -\frac{9}{4}$, não há nenhum ponto correspondente na parábola.

Definimos:

$$CD(f) = \left[-\frac{9}{4}, \infty\right)$$

A figura abaixo ilustra a definição do domínio e do contradomínio de f:



A inversa de f é uma função f^{-1} cujo domínio e contradomínio são, respectivamente, o contradomínio e o domínio de f. Além disso, a inversa satisfaz a propriedade:

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \forall\, x \in D(f)$$

Uma técnica para a determinação da inversa consiste em substituir x e y na lei da função f, e isolar y para obter $y = f^{-1}(x)$.

$$x = y^2 - y - 2 \Leftrightarrow \; y^2 - y - (2 + x) = 0$$

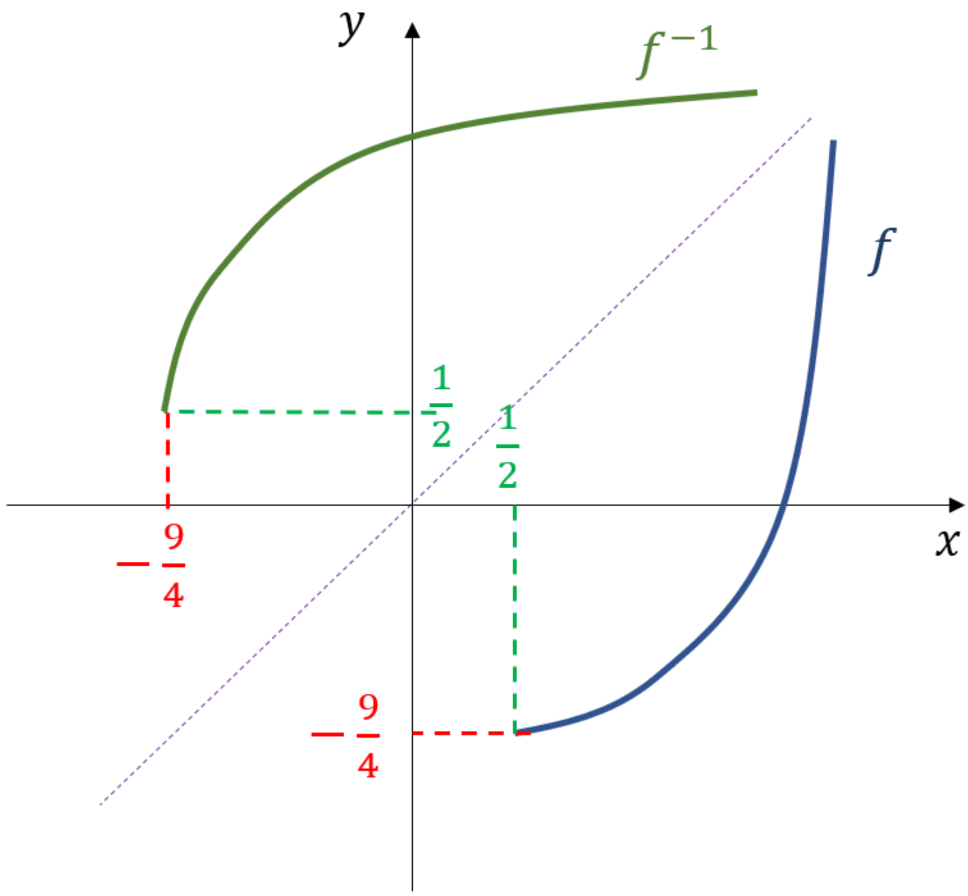
Resolvendo essa equação do segundo grau em y, obtemos:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{9 + 4x}}{2}$$

Observe que $CD(f^{-1}) = D(f) = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. Isto é garantido quando escolhemos, entre as duas soluções acima:

$$f^{-1}(x) = \frac{1 + \sqrt{9 + 4x}}{2}$$

Para esboçar os gráficos, podemos utilizar a propriedade de que uma função e sua inversa possuem gráficos **simétricos em relação à reta $y = x$**. Podemos imaginar também que, como f é uma semiparábola, f^{-1} é uma **semiparábola na horizontal**.



Resposta esperada: o domínio é $D(f) = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. A função inversa é $f^{-1}(x) = \frac{1+\sqrt{9+4x}}{2}$ e os gráficos encontram-se acima.