www.estudar.com.vc

P2 2014.1 Adaptada FEI

Exercício 1 Derivadas

Explicação

1. Derivar e simplificar a função:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x - x^2} - arcsen\sqrt{x}\right) + x\, arcsen\sqrt{x}}, \textbf{com } \boldsymbol{x \in]0,1[}.$$

Vamos derivar cada uma das funções, de forma separada, e depois juntar as parcelas para obter $f'(\mathrm{x})$.

Começando pela função $\boldsymbol{\sqrt{x - x^2}}$ e usando a Regra da Cadeia:

$$f'\left(\sqrt{x - x^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}} f'(x - x^2) = \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}} = \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x}\sqrt{1 - x}}$$

É importante observar que esta derivada está bem definida. O denominador se anula quando $x = 0$ ou $x = 1$. No entanto, o enunciado especifica que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{]0,1[}$, então esta derivada existe para todos os pontos nesse intervalo.

Agora derivamos a função $\boldsymbol{arcsen\sqrt{x}}$. Trata-se mais uma vez de uma função composta, entre a função arco seno e a função raiz quadrada. Por isso, usamos novamente a Regra da Cadeia:

$$f'\left(arcsen\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{x}\right)^2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1 - x}}$$

Por fim, derivamos o último termo que resta, a função $\boldsymbol{x \cdot arcsen\sqrt{x}}$. Usando a Regra do Produto:

$$f'^{\left(x \cdot arcsen\sqrt{x}\right)} = 1 \cdot arcsen\sqrt{x} + x f'\left(arcsen\sqrt{x}\right) =$$

$$= arcsen\sqrt{x} \; + \; x\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

Basta juntar todas as derivadas para termos a derivada da função.

$$f'(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\left(f'^{\left(\sqrt{x-x^2}\right)} - f'^{\left(arcsen\sqrt{x}\right)}\right) + f'\left(x \cdot arcsen\sqrt{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-2\mathrm{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\right) + \; arcsen\sqrt{x} \; + \frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} =$$

$$= \frac{1-2\mathrm{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + arcsen\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} =$$

$$= \boldsymbol{arcsen\sqrt{x}}$$

Resposta esperada: $\boldsymbol{arcsen\sqrt{x}}$