www.estudar.com.vc

P2 2016.2 FEI

Adaptada

Exercício 1b Definição de Derivada

Explicação

1. Sendo $f: R \to R$ dada por $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x}, & se\ x < 0 \\ 0, & se\ x = 0 \\ x^3, & se\ x > 0 \end{cases}$, pede-se:

b. Estudar, usando a definição de derivada num ponto, a existência de $f'(0)$.

Primeiro, vamos lembrar da **definição de derivada** em um ponto:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

No nosso caso, queremos verificar a existência da derivada em $a = 0$. Logo:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Como $f(0) = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

A derivada será o valor do limite acima.

Nossa função é definida por partes, então, precisamos analisar a existência desse limite através de limites laterais:

Primeiro, para valores de x tendendo a 0 pela esquerda:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{\sin^2 x}{x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

Chegamos ao limite fundamental, logo:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Vamos agora analisar o limite quando x tende a 0 pela direita:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to 0^+} x^2$$

Aplicando o ponto $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 = 0^2 = 0$$

Os **limites laterais não convergem**, então, o limite **não** existe e, portanto, a derivada também não existe.

A função f não é derivável no ponto $a = 0$.

Resposta esperada: A função f não é derivável no ponto $a = 0$.