www.estudar.com.vc

P1 2016.1 FEI

Adaptada

Exercício 1 Função Inversa

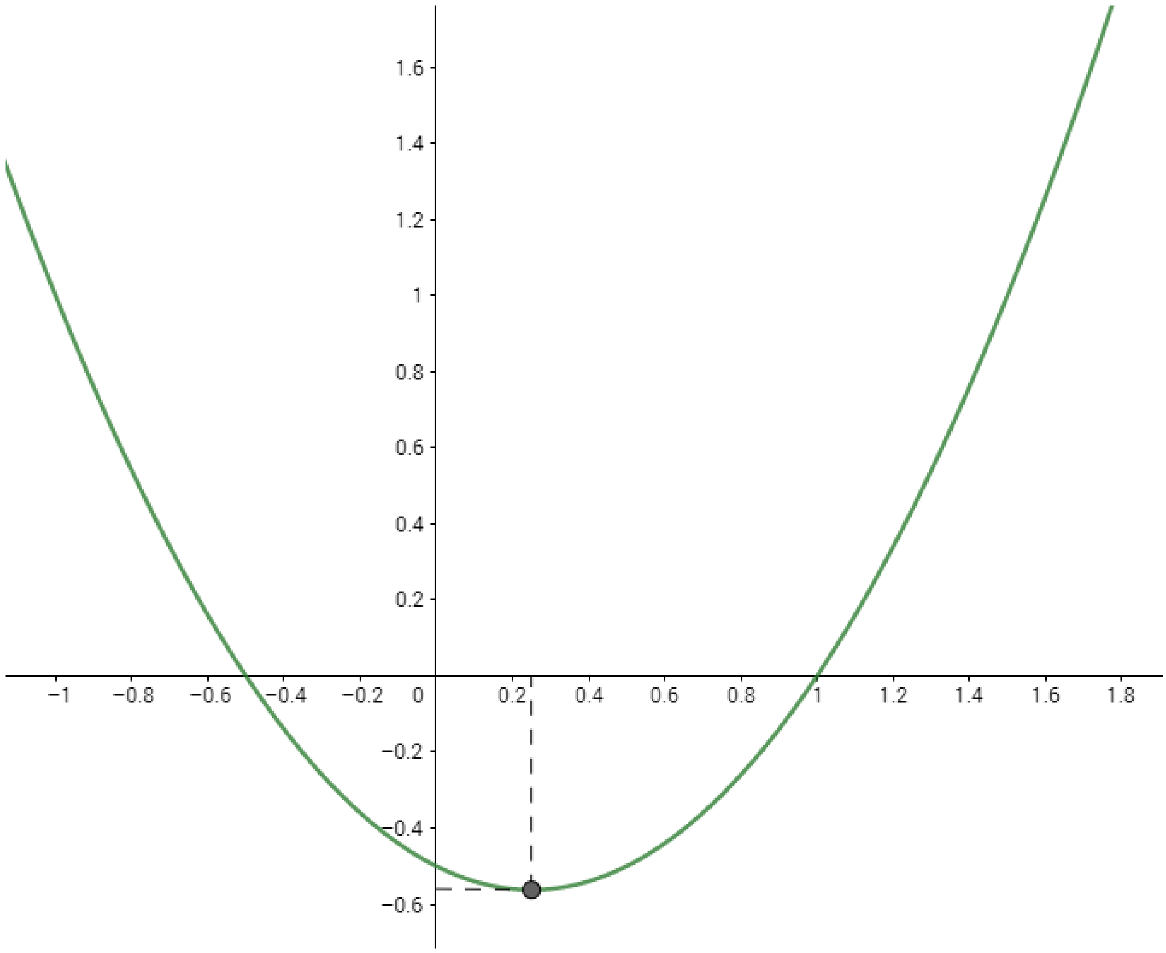
Explicação

1. Dada a função $f(x) = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Determine uma expressão para a inversa da função $f(x)$ (denotada por f^{-1}) e construa os gráficos de f e f^{-1} no maior domínio onde exista a inversa.

A função $f(x) = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ pode ser escrita como:

$$f(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} - \frac{9}{16} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

Assim, o gráfico de $f(x)$ é uma parábola voltada para cima com o vértice em $\left(\frac{1}{4}, -\frac{9}{16}\right)$.



Como queremos encontrar sua inversa, precisamos do intervalo em que ela é **bijetora,** logo:

$$D_f = \left[\frac{1}{4}, \infty\right[\ e \ Im_f = \left[-\frac{9}{16}, \infty\right[$$

Como $g(x) = f^{-1}$:

$$D_g = \left[-\frac{9}{16}, \infty\right[e \ Im_g = \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$$

Para encontrar a inversa, vamos fazer:

$$f[g(x)] = g(x)^2 - \frac{g(x)}{2} - \frac{1}{2} = x$$

$$g(x)^2 - \frac{g(x)}{2} - \frac{1}{2} - x = 0$$

Precisamos **isolar $\boldsymbol{g(x)}$**. Para isso, vamos utilizar *Bháskara*:

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} - x\right) = \frac{9}{4} + 4x$$

$$g(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 4x\right)}}{2}$$

Para saber se usaremos $+$ ou $-$ vamos testar para $x = 0$:

$$g_+(0) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$$

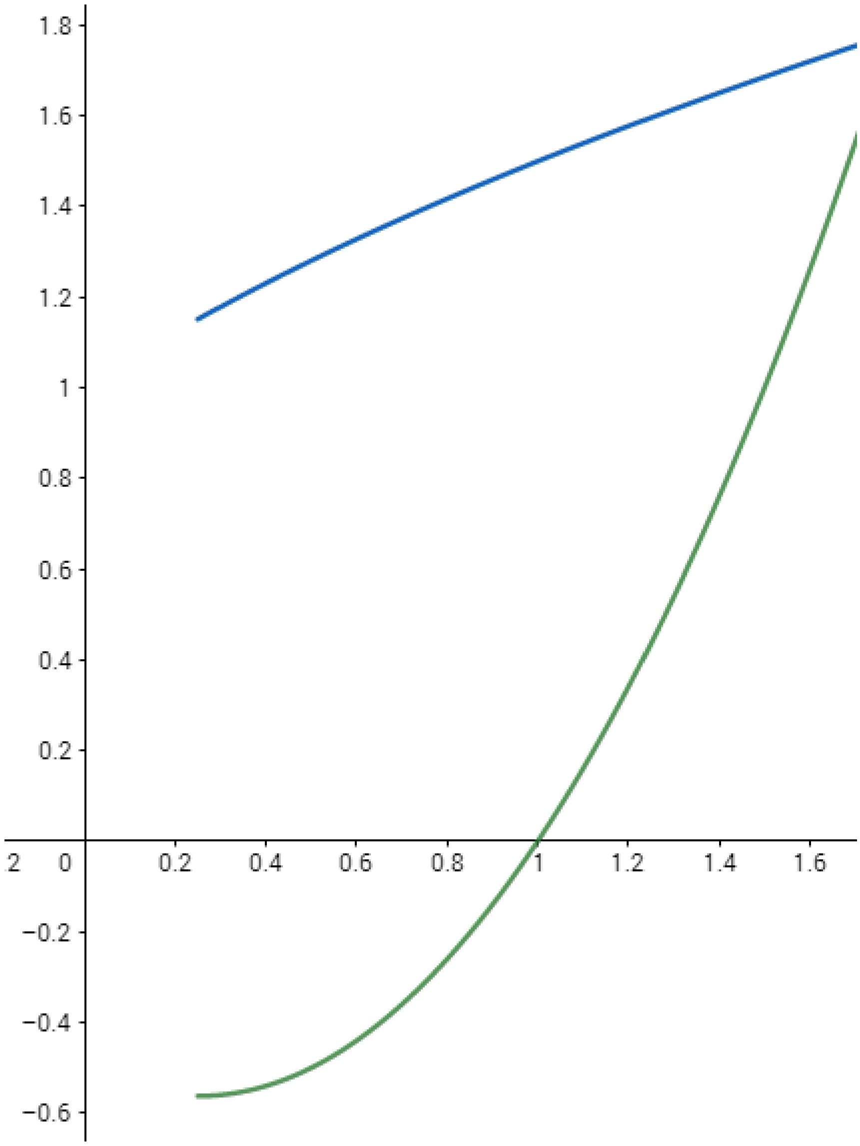
$$g_-(0) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

A resposta para $g_-(0)$ não pertence à Imagem de $g(x)$, então, usaremos $g_+(0)$.

Assim:

$$g(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 4x\right)}}{2}$$

Como $g(x)$ é $f^{-1}(x)$, seu gráfico é o gráfico de $f(x)$ espelhado na origem:



Resposta esperada: $f^{-1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{9}{4}+4x\right)}}{2}$**. Gráfico acima.**