www.estudar.com.vc

Álgebra Linear 2

Prova 1

1. Projeção Ortogonal

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno <. , .> e considere as seguintes afirmações:

(I) se $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base de V e se $v \in V$ é tal que $< v, e_i > = \ 0$, para $i = 0,1,2 \dots, n$ então $v = 0$;

(II) se S é um subespaço de V e se $e_1, e_2, \dots, e_m \in S$ são vetores dois a dois distintos tais que $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ é uma base de S, então

$$proj_S v = proj_{e_1} v + proj_{e_2} v + \cdots + proj_{e_m} v$$

para qualquer $v \in V$.

(III) se $v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}, v \neq 0 \ e \ \lambda \neq 0$, então:

$$proj_{\lambda v} w = \lambda \, proj_v w$$

<u>Escolha uma alternativa</u>

A. Apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.
B. Apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.
C. Apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.
D. Apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.
E. Todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

2. Subespaço Ortogonal

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = [(2,1,-1,2),(-1,2,-2,-1)]$$

Se $v \in S$ e $w \in S^{\perp}$ são tais que

$$[(6,-4,2,2)] = v + w \ .$$

e se $w = (a,b,c,d)$, então $a + b + c + d$ é igual a:

A. -4
B. -6
C. 2
D. 8
E. -2

3. Produto Interno

Considere a função $<.,.>$ definida por:

$$< p,q > = p'(0)q'(0) + p'(1)q'(1) + p'(2)q'(2) + p'(3)q'(3), \quad p,q \in P_3(\mathbb{R})$$

Assinale a alternativa correta:

A. $<.,.>$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$, pois existem $p,q \in P_3(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $< \lambda p, q > \neq \lambda < p,q >$

B. $<.,.>$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$, pois existem $p \in P_3(\mathbb{R})$ não nulo tal que $< p,p > = 0$

C. $<.,.>$ é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$

D. $<.,.>$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$, pois existem $p,q \in P_3(\mathbb{R})$ tais que $< p,q > \neq < q,p >$

E. $<.,.>$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$, pois existem $p,q,r \in P_3(\mathbb{R})$ tais que $< p+q, r > \neq < p,r > + < q,r >$

4. Projeção Ortogonal e Melhor Aproximação

Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por:

$$< p\,,q > = \int_0^1 p(t)q(t)dt\,, \quad p,q \in P(\mathbb{R})$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $q(t) = a + bt$ é o elemento de $P_1(\mathbb{R})$ mais próximo de $p(t) = t^4$, então $a + b$ é igual a:

A. $\frac{1}{5}$
B. $\frac{2}{5}$
C. $\frac{3}{5}$
D. $\frac{4}{5}$
E. 1

5. Norma e Subespaço Ortogonal

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno <. , .> e considere as seguintes afirmações:

(I) Para quaisquer $v, w \in V$ vale que:

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

(II) Para quaisquer $v, w \in V$, vale que v é ortogonal a w se, e somente se, $\|v+w\| = \|v-w\|$;

(III) Se S_1 e S_2 são subespaços de V tais que $S_1 \subset S_2$, então $S_1^{\perp} \subset S_2^{\perp}$;

<u>Escolha uma alternativa</u>

A. Apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.
B. Todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.
C. Apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.
D. Apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.
E. Apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

6. Projeção Ortogonal e Gram-Schmidt

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual e seja $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base de $\mathbb{R}^4$. Suponha que $C = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ seja a base ortogonal obtida a partir de B pela aplicação do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Se $v_4 = (-1,3,1,1)$ e $w_4 = (-2,1,0,1)$, então $proj_{[w_1,w_2,w_3]} v_4$ é igual a:

A. $(1,1,2,1)$
B. $(2,1,1,3)$
C. $(1,2,1,0)$
D. $(-1,2,-1,-4)$
E. $(0,1,1,-1)$

7. Transformações Lineares

Seja $T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por:

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a + d & b - c \\ c + d & a - b \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Assinale a alternativa correta:

A. $\dim\left(Ker(T)\right) = 2$

B. T é $injetora$

C. $\dim\left(Im(T)\right) < \dim\left(Ker(T)\right)$

D. T é $sobrejetora$

E. $\dim\left(Im(T)\right) = 3$

8. Transformações Lineares

Seja $T: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a-b+c-d, a-b, c-d), \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Assinale a alternativa correta:

A. T é $sobrejetora$

B. $Ker(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$

C. $\dim\big(Ker(T)\big) = 3$

D. $\dim\big(Ker(T)\big) = 1$

E. $Im(T) = [(1,1,0), (1,0,1)]$

9. Transformações Lineares

Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2 e seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(x, y, z) = (-x - 2y - 3z, x + 2y + 3z, 3x + 6y + 9z), \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) existe $v \neq 0$ em $Ker(T) \cap W$;

(II) existe $v \neq 0$ em $Im(T) \cap W$

(III) $T\big(T(v)\big) = T(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$;

Escolha uma alternativa

A. Apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.
B. Apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.
C. Apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.
D. Apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.
E. Nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira.

10. Projeção Ortogonal e Melhor Aproximação

Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno <.,.> e S um subespaço de V. Se $v \in V$, $w \in S^{\perp}$ e $z \in S$ são vetores não nulos tais que $v = 4w + 7z$, então o vetor de S mais próximo de v é:

A. $v - proj_z v$
B. z
C. $proj_w v$
D. $7z$
E. $-7z$

11. Subespaço Ortogonal

Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por:

$$< p, q > = \ p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R})$$

Se

$$S = [2 + t - t^2, -3 + t^2]$$

e $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $1 + at + bt^2 \in \ S^{\perp}$ então $a + b$ é igual a:

A. $\frac{1}{2}$

B. -4

C. $-\frac{1}{2}$

D. -2

E. $-\frac{3}{2}$

12. Norma e Subespaço Ortogonal

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno <. , .> e considere as seguintes afirmações:

(I) Para quaisquer $v, w \in V$ vale que $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ se, e somente se, $v\ e\ w$ são linearmente dependentes;

(II) Para quaisquer $v, w \in V$, vale que $|< v, w >| = \|v\|\|w\|$ se, e somente se, $v = 0$ ou existe $\lambda \geq 0$ tal que $w = \lambda v$;

(III) Para quaisquer $v, w \in V$ e qualquer subespaço S de V vale que se $< v, w > = 0$ e $w \in S^{\perp}$, então $v \in S$;

<u>Escolha uma alternativa</u>

A. Apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.
B. Todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.
C. Nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira.
D. Apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.
E. Apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

13. Norma, Produto Interno e Subespaço Ortogonal

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno <. , .>, S um subespaço de V e $v, w \in V$ tais que $v - w \in S$ e $w \in S^{\perp}$. Pode-se afirmar que:

A. $< v, w >= \|v\|$

B. $v = 0$

C. $< v, w > = 0$

D. $< v, w > = \|w\|^2$

E. $v \in S^{\perp}$

14. Transformações Lineares

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T: V \to W$ uma transformação linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se T é injetora, então $\dim(V) \leq \dim(W)$

(II) Se $\dim(V) \leq \dim(W)$, então T é injetora

(III) Se T é sobrejetora, então $\dim(V) \geq \dim(W)$

<u>Escolha uma alternativa</u>

A. Apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.
B. Apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.
C. Apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.
D. Apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.
E. Todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

15. Ortogonalidade

Sejam $n \geq 1$ um inteiro, V um espaço vetorial de dimensão n munido de um produto interno $<.,.>$ e $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ com $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ não nulos e dois a dois distintos. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se o conjunto B é ortogonal, então B é uma base V

(II) Se B é uma base de V, então o conjunto B é ortogonal

(III) O conjunto B é ortogonal se, e somente se, a matriz

$$\begin{bmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > & \cdots & < v_1, v_n > \\ < v_2, v_2 > & < v_2, v_2 > & \cdots & < v_2, v_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < v_n, v_1 > & < v_n, v_2 > & \cdots & < v_n, v_n > \end{bmatrix}$$

tem determinante positivo.

Escolha uma alternativa

A. Apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.
B. Apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.
C. Apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.
D. Apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.
E. Apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

16. Transformações Lineares

Sejam V um espaço vetorial de dimensão 2 e $T: V \to V$ uma transformação linear não nula tal que

$$T\big(T(v)\big) = 0$$

para todo $v \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(Ker(T)\big) = 1$

(II) $\dim\big(Im(T)\big) = 2$

(III) $Ker(T) = Im(T)$

Escolha uma alternativa

A. Apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.
B. Apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.
C. Apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.
D. Apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.
E. Apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Gabarito

1. Alternativa D
2. Alternativa E
3. Alternativa B
4. Alternativa C
5. Alternativa C
6. Alternativa C
7. Alternativa E
8. Alternativa E
9. Alternativa C
10. Alternativa D
11. Alternativa D
12. Alternativa C
13. Alternativa D
14. Alternativa D
15. Alternativa D
16. Alternativa E