www.estudar.com.vc

PF 2017.1 Adaptada
FGV

Exercício 1 Domínio e Assíntotas

1. Encontre o domínio e todas as assíntotas da seguinte função:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 6x + 5}}$$

O domínio de uma função f é o conjunto de todos os pontos nos quais ela está definida.

A função deste exercício só não está definida quando o denominador se anula, ou seja, quando:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad ou \quad x = 5$$

Logo, o domínio de f é todos o conjunto dos números reais, exceto os pontos $\mathbf{1}$ e $\mathbf{5}$:

$$\boldsymbol{D\big(f(x)\big) = \mathbb{R} - \{1, 5\}}$$

Sobre as assíntotas, vamos buscar inicialmente as assíntotas verticais, que são retas na forma $x = x_0$, onde x_0 é tal que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Antes de calcular esse limite, note que a expressão f pode ser simplificada, fatorando-se o numerador e o denominador.

Como as raízes do denominador são 1 e 5, temos que, para o cálculo dos limites:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 6x + 5} = \frac{x(x-5)}{(x-1)(x-5)} = \frac{x}{x-1}$$

Os possíveis pontos x_0 onde existem assíntotas verticais são aqueles onde f não está definida.

Calculando o limite lateral esquerdo:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

Isso resulta em menos infinito, pois, o numerador tende a 1 e o denominador tende a zero por valores negativos, já que x tende a 1 pela esquerda.

Esse limite já é suficiente para concluir que f possui uma assíntota vertical em $x = 1$. No entanto, vamos repetir o cálculo para o limite pela direita, a fim de verificar o comportamento da função:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$$

Concluímos, então, que a reta $\boldsymbol{x = 1}$ é uma assíntota vertical de f.

Outro ponto no qual f não está definida é $x = 5$, sendo, portanto, um candidato a assíntota vertical. Temos, no entanto, que:

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} \frac{x}{x-1} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} \frac{x}{x-1} = \frac{5}{4}$$

Não há uma assíntota vertical em $x = 5$. Isso ocorre exatamente porque pudemos fatorar o denominador e simplificar f, eliminando o termo $x - 5$.

Buscamos, agora, as assíntotas horizontais, calculando o limite da função $f(x)$ para $x \to \pm\infty$.

Usando a regra de *L'Hospital*:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Como os limites são constantes, $y = 1$ é uma assíntota horizontal de f.

Resposta esperada: o domínio da função é $\boldsymbol{D\big(f(x)\big)} = \mathbb{R} - \{\mathbf{1}, \mathbf{5}\}$, a assíntota vertical é $\boldsymbol{x = 1}$ e a assíntota horizontal $\boldsymbol{y = 1}$.